[illegible]

[illegible]

[illegible]

普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 2-2

B版

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学教材实验研究组　编著

*

出版发行

（北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼　邮编：100081）

网址：http://www.pep.com.cn

××××印刷厂印装　全国新华书店经销

*

开本：890 毫米×1 240 毫米　1/16　印张：7　字数：156 000

2007 年 4 月第 2 版　　年　月第　次印刷

印数：00 001～000 000 册

ISBN 978-7-107-19638-6 / G・12688(课)　定价：6.00 元

主　　编　　高存明

本册主编　　罗声雄　王池富
编　　者　　罗声雄　高存明　刘长明
　　　　　　李华英　韩际清　张润琦
责任编辑　　王旭刚
美术编辑　　李宏庆　王　喆
封面设计　　李宏庆

本册导引

世界上的事物都处在不断变化之中．认识事物的变化规律，是人类面临的重大课题．数学关注变化着的事物内在的数量关系，特别是变量之间的函数关系．研究函数的变化趋势不仅是现实的需要，而且有重要的理论意义．十七世纪，数学泰斗牛顿和莱布尼茨把这种研究提高到一个新的阶段．他们以大量的物理问题和几何问题为背景，研究了函数的平均变化率，引进了一种全新的运算——求导数，进而引进了导数的逆运算——求积分．两位巨匠开创性的工作，使前人未能解决的诸多物理问题，如变速运动的瞬时速度、变力作功等问题迎刃而解；同时使许多重大几何问题，如曲线的切线与长度、封闭曲线形的面积、立体体积等问题也获得圆满解决，并创造了微积分学．三百年来，微积分学不仅对数学，而且对整个人类文明产生了不可估量的影响．

本册第一章“导数及其应用”，将把同学们引入一个充满活力的领域，在这里，同学们将进一步领悟辩证的思维方式，用微观去驾驭宏观，从变量关系层面去把握事物变化的数学本质，并学习运用导数解答现实生活中的问题．

本册第二章“推理与证明”，将比较系统地整理推理方法与证明方法．数学是一门富于活力的学科，常常用合情推理去发现新的数量规律；数学又是一门逻辑严谨的学科，它的结论、定理和公式都要有严格的证明．所谓证明就是用简单的道理（公理）或已知的事实（定理）去说明各种结论的正确性，其实就是说理．通过这一章的学习，同学们不仅要掌握几种推理规则和证明方法，而且要进一步养成思维严谨、条理清晰、言之有理、论证有据的说理习惯，进一步提高逻辑思维能力和创新能力．

本册第三章“数系的扩充与复数”，将简要回顾数系从自然数扩充到实数的过程，并进一步将实数系扩充到复数系．数系的不断扩充，不仅受到实际需要的驱动，而且是解决数学内部矛盾的需要．人类理性思维的超前性在其中得以充分体现．通过本章的学习，同学们将感受到数系扩充和引入复数的必要性，了解复数的一些基本知识，体会人类理性思维的重要性．

第一章　导数及其应用 …… 1
1.1　导数 …… 3
◆ 1.1.1　函数的平均变化率 …… 3
◆ 1.1.2　瞬时速度与导数 …… 6
◆ 1.1.3　导数的几何意义 …… 11
1.2　导数的运算 …… 14
◆ 1.2.1　常数函数与幂函数的导数 …… 14
◆ 1.2.2　导数公式表及数学软件的应用 …… 17
◆ 1.2.3　导数的四则运算法则 …… 19
1.3　导数的应用 …… 24
◆ 1.3.1　利用导数判断函数的单调性 …… 24
◆ 1.3.2　利用导数研究函数的极值 …… 27
◆ 1.3.3　导数的实际应用 …… 30
1.4　定积分与微积分基本定理 …… 36
◆ 1.4.1　曲边梯形面积与定积分 …… 36
◆ 1.4.2　微积分基本定理 …… 40
本章小结 …… 45
阅读与欣赏
微积分与极限思想 …… 49
第二章　推理与证明 …… 51
2.1　合情推理与演绎推理 …… 53
◆ 2.1.1　合情推理 …… 53
◆ 2.1.2　演绎推理 …… 59
2.2　直接证明与间接证明 …… 63
◆ 2.2.1　综合法与分析法 …… 63
◆ 2.2.2　反证法 …… 66
2.3　数学归纳法 …… 69
◆ 2.3.1　数学归纳法 …… 69

◆ 2.3.2　数学归纳法应用举例 …… 71
本章小结 …… 74
阅读与欣赏
《原本》与公理化思想 …… 77
数学证明的机械化——机器证明 …… 78

第三章　数系的扩充与复数 …… 79

3.1　数系的扩充与复数的概念 …… 81
◆ 3.1.1　实数系 …… 81
◆ 3.1.2　复数的概念 …… 83
◆ 3.1.3　复数的几何意义 …… 86
3.2　复数的运算 …… 91
◆ 3.2.1　复数的加法与减法 …… 91
◆ 3.2.2　复数的乘法 …… 93
◆ 3.2.3　复数的除法 …… 95
本章小结 …… 99
阅读与欣赏
复平面与高斯 …… 102

附录
部分中英文词汇对照表 …… 103

后记 …… 104

第一章　导数及其应用

1.1　导数

1.2　导数的运算

1.3　导数的应用

1.4　定积分与微积分基本定理

同学们，你会求函数曲线的切线吗？你会求曲线形的面积吗？本章将引进一对新的运算——求导数和求积分．它们同加法与减法、乘法与除法一样，互为逆运算．这两种新的运算将帮助你解决上述两个问题．

当你看到“导数”、“积分”这两个名词时，你也许感到生疏．其实它们不过是初中数学概念的延伸．这两种运算的对象是函数（曲线）．求导数和求积分的基本思想是以直代曲．用高倍放大镜观察，一条曲线的微小片段，看上去像一条很短很短的线段．这样曲线可以近似地看成折线，再用处理直线的方法来研究函数曲线．可见“导数”与“积分”来源于同学们所熟悉的知识．

导数和积分是微积分学中最重要的两个概念．它们是研究函数和解决众多实际问题的重要工具．本章的重点是导数及其应用，以及定积分和微积分基本定理．

在本章的学习中，同学们将通过实际问题理解导数与积分概念，并学习求一些初等函数的导数与积分，用它们去解决一些实际问题，为今后进一步学习微积分学打下良好的基础．同时，通过本章的学习，体会用微观驾驭宏观的辩证思维方法，领略微积分学的文化价值．

1.1 导　　数

1.1.1 函数的平均变化率

在爬山过程中，我们都有这样的感觉：当山坡平缓时，步履轻盈；当山坡陡峭时，气喘吁吁．怎样用数学反映山坡的平缓与陡峭程度呢？下面我们用函数变化的观点来研究这个问题．

假设图 1-1 是一座山的剖面示意图，并在上面建立平面直角坐标系．A 是出发点，H 是山顶．爬山路线用函数 $y=f(x)$表示．

自变量 x 表示某旅游者的水平位置，函数值 $y=f(x)$表示此时旅游者所在的高度．想想看，如何用数量表示此旅游者登山路线的平缓及陡峭程度呢？

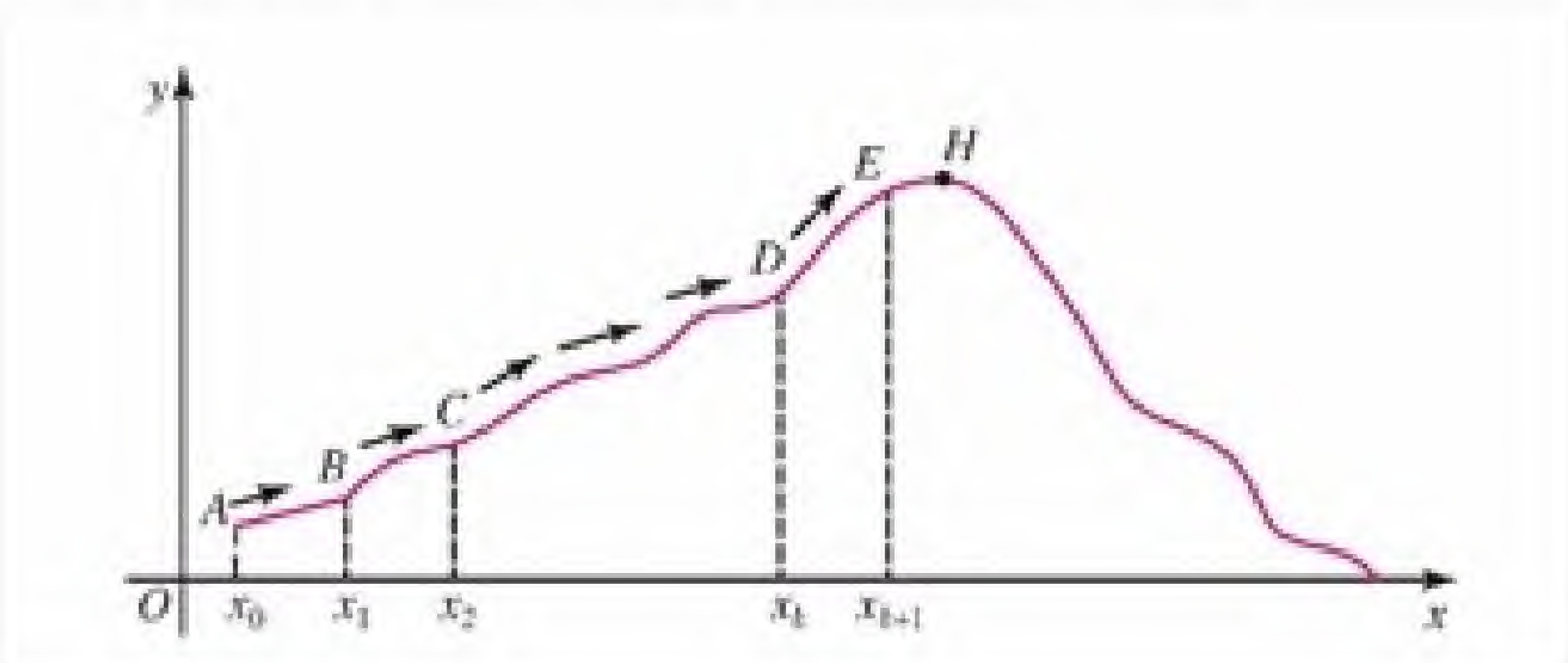


图 1-1

某旅游者从点 A 爬到点 B，假定这段山路是平直的．设点 A 的坐标为$(x_0，y_0)$，点 B 的坐标为$(x_1，y_1)$，自变量 x 的改变量为x_1-x_0，记作 Δx，函数值的改变量为 y_1-y_0，记作 Δy，即

$$\Delta x=x_1-x_0，\qquad \Delta y=y_1-y_0.$$

于是，此人从点 A 爬到点 B 的位移可用向量

$$\overrightarrow{AB}=(\Delta x，\Delta y)$$

来表示．假设向量$\overrightarrow{AB}$对 x 轴的倾斜角为 θ，直线 AB 的斜率为 k，从图 1-2 容易看出

$$k=\tan\theta=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

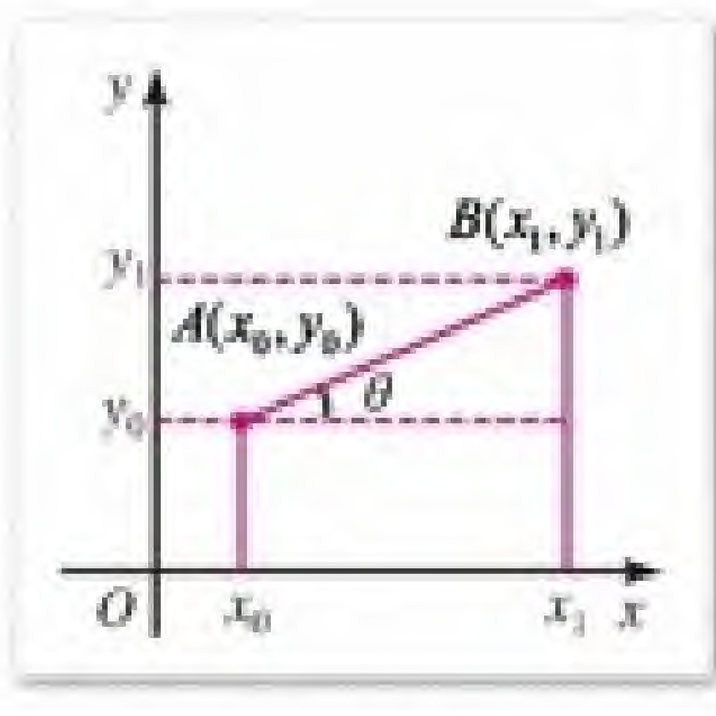


图 1-2

显然，“线段”所在直线的斜率的绝对值越大，山坡越陡．这就是说，竖直位移与水平位移之比$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$的绝对值越大，山坡越陡；反之，山坡越平缓．

现在摆在我们面前的问题是：山路是弯曲的，怎样用数量刻画弯曲山路的陡峭程度呢？

一个很自然的想法是将弯曲山路分成许多小段，每一小段山坡可视为平直的．例如，山坡 DE 可近似地看作线段 DE，再用对平直山坡 AB 分析的方法，得到此段山坡的陡峭程度可以用比值 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_{k+1})-f(x_k)}{x_{k+1}-x_k}$ 近似地刻画．注意各小段的 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 是不尽相同的．但不管是哪一小段山坡，高度的平均变化都可以用起点、终点的纵坐标之差与横坐标之差的比值

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_{k+1})-f(x_k)}{x_{k+1}-x_k}$$

来度量．由此，我们引出函数平均变化率的概念．

一般地，已知函数 $y=f(x)$，x_0，x_1 是其定义域内不同的两点，记

$\Delta x=x_1-x_0$，

$\Delta y=y_1-y_0=f(x_1)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$❶，

则当 $\Delta x\neq 0$ 时，商

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

称作函数 $y=f(x)$ 在区间 $[x_0,\ x_0+\Delta x]$（或 $[x_0+\Delta x,\ x_0]$）的**平均变化率**．

注

❶ 这里 Δx，Δy 可为正值，也可为负值．但 $\Delta x\neq 0$，Δy 可以为 0．

例 1　求函数 $y=x^2$ 在区间 $[x_0,x_0+\Delta x]$（或 $[x_0+\Delta x,x_0]$）的平均变化率．

解：函数在区间 $[x_0,\ x_0+\Delta x]$（或 $[x_0+\Delta x,\ x_0]$）的平均变化率为

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{(x_0+\Delta x)^2-x_0^2}{\Delta x}=2x_0+\Delta x.$$

由上式可以看出，当 x_0 取定值时，Δx 取不同的数值，函数的平均变化率不同．当 Δx 取定值，x_0 取不同的数值时，该函数的平均变化率也不一样．例如，如图 1-3，x_0 取正值，并不断增大时，该函数的平均变化率也不断地增大，曲线变得越来“越陡”．

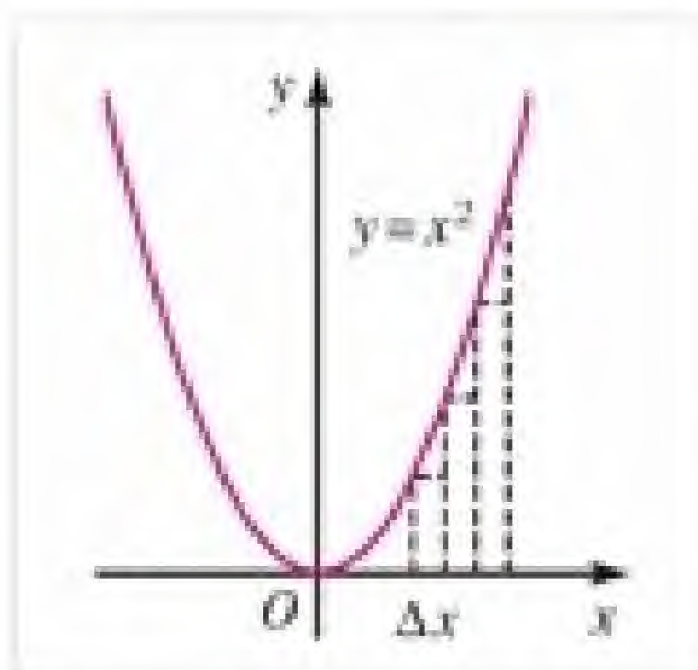


图 1-3

例 2　求函数 $y=\frac{1}{x}$ 在区间 $[x_0,x_0+\Delta x]$（或 $[x_0+\Delta x,x_0]$）的平均变化率（$x_0\neq 0$，且 $x_0+\Delta x\neq 0$）．

解：函数 $y=\frac{1}{x}$ 的平均变化率为

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{\frac{1}{x_0+\Delta x}-\frac{1}{x_0}}{\Delta x}=-\frac{1}{(x_0+\Delta x)x_0}.$$

探索与研究

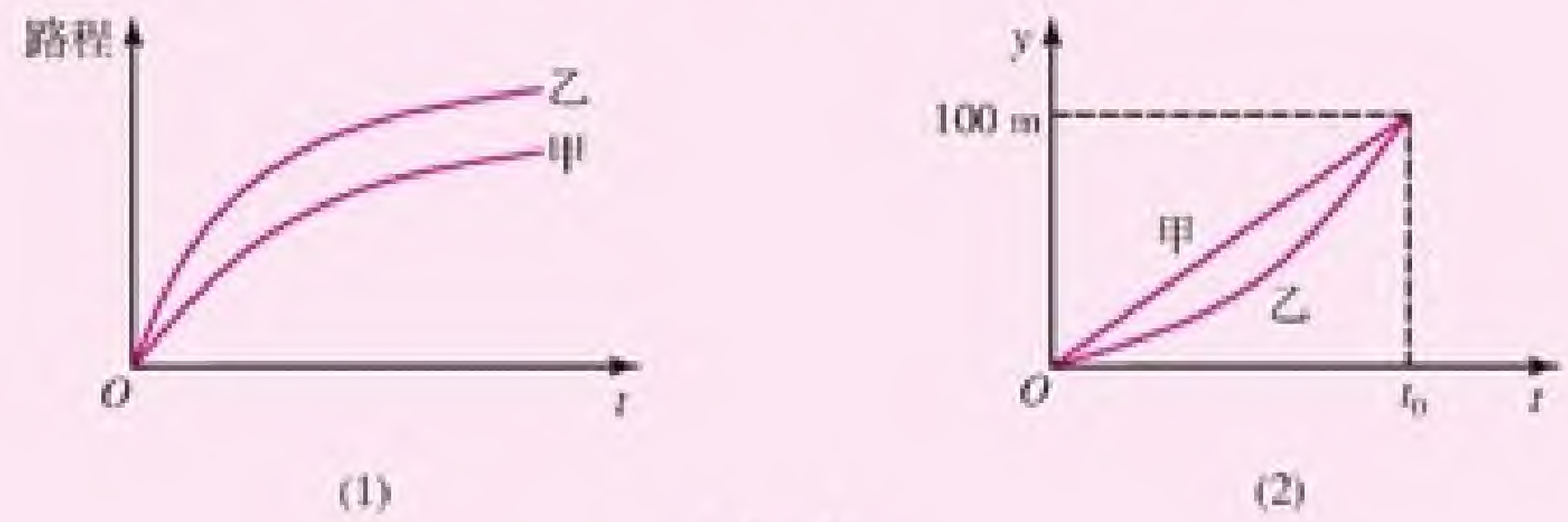
画出反比例函数的图象，从例 2 所得函数的平均变化率表达式，探索表达式的值（平均变化率）与函数图象之间的关系．

练习A

1. 甲、乙两人跑步路程与时间关系以及百米赛跑路程与时间关系分别如图(1)(2)所示，试问：

(1) 甲、乙两人哪一个跑得较快？

(2) 甲、乙两人百米赛跑，问接近终点时，谁跑得较快？



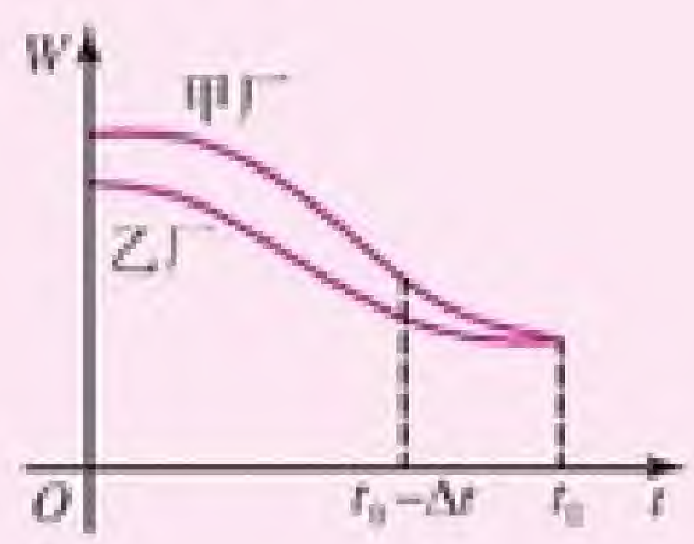
(第1题)

2. 求函数 $y=x^2$ 在区间 $\left[1,\frac{4}{3}\right]$，$\left[2,\frac{7}{3}\right]$，$\left[\frac{8}{3},3\right]$ 的平均变化率．其中哪一个最大？哪一个最小？

3. 求函数 $y=x^2-2x+3$ 在区间 $\left[\frac{23}{12},2\right]$ 和 $\left[2,\frac{25}{12}\right]$ 的平均变化率．

练习B

1. 两个工厂经过治理，污水的排放量(W)与时间(t)的关系如图所示．试指出在接近 t_0 时哪一个工厂治污效果较好？



(第1题)

2. 试指出正弦函数 $y=\sin x$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$ 和 $\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$ 的平均变化率哪一个较大？

1.1.2　瞬时速度与导数

物体作匀速直线运动，速度是路程与时间之比：$v=\frac{s}{t}$. 如果物体作变速直线运动，那么它的速度如何刻画呢？例如，自由落体、竖直向上发射火箭都是变速直线运动，这类运动路程随时间变化，速度也随时间变化，速度与路程、时间有什么样的关系呢？

设物体运动路程与时间的关系是 $s=f(t)$（图 1-4）. 从 t_0 到 $t_0+\Delta t$ 这段时间内，物体运动的平均速度是

$$v_0=\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}=\frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

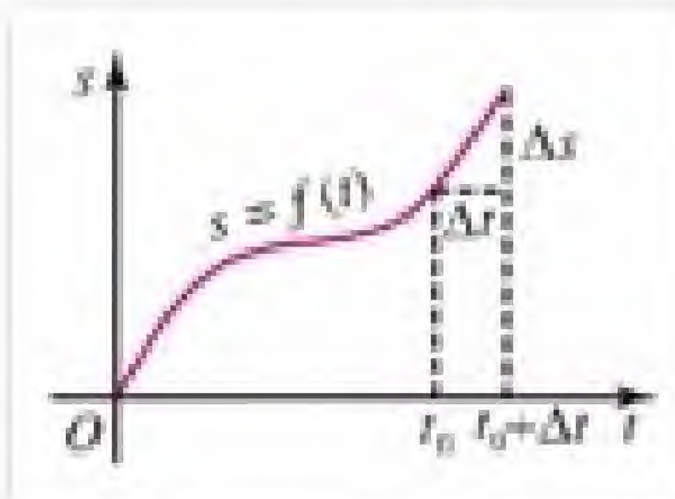


图 1-4

可见平均速度 v_0 就是函数 $f(t)$ 在区间 $[t_0, t_0+\Delta t]$ 的平均变化率. 那么在某一时刻 t_0，运动的速度（瞬时速度）是什么呢？我们从平均速度出发讨论这个问题.

当 $|\Delta t|$ 取一系列越来越小的值时，平均速度 v_0 取一系列数值，这一系列数值有什么特点呢？下面我们以 10 米跳台跳水运动为例来分析这个问题❶.

注

❶ 跳水运动在竖直方向上是匀加速运动，匀加速运动的运动方程是

$$s=v_0t+\frac{1}{2}at^2,$$

其中 v_0 为初始速度，a 为加速度，t 为运动时间.

设在 10 米跳台上，运动员跳离跳台时竖直向上的速度为 6.5 m/s. 运动员在时刻 t 距离水面的高度

$$h(t)=10+6.5t-\frac{1}{2}gt^2,$$

其中 g 为重力加速度，$g\approx 9.8\ \mathrm{m/s^2}$. 于是，

$$h(t)=10+6.5t-4.9t^2.$$

现在我们来探讨运动员在 $t=2$ s 时竖直向上的（瞬时）速度.

容易算出，该运动员在 2 s 至 2.1 s（记为[2，2.1]）这段时间内的平均速度为

$$\frac{h(2.1)-h(2)}{2.1-2}=\frac{2.041-3.4}{0.1}=-13.59(\mathrm{m/s}).$$

运用计算器可以得到下列平均速度表：

时间区间/s	时间间隔/s	平均速度/（m·s⁻¹）
[2，2.1]	0.1	−13.59
[2，2.01]	0.01	−13.149
[2，2.001]	0.001	−13.104 9
[2，2.000 1]	0.000 1	−13.100 49
[2，2.000 01]	0.000 01	−13.100 049
……	……	……

时间区间/s	时间间隔/s	平均速度/ $(m\cdot s^{-1})$
[1.9, 2]	0.1	−12.61
[1.99, 2]	0.01	−13.051
[1.999, 2]	0.001	−13.095 1
[1.999 9, 2]	0.000 1	−13.099 51
[1.999 99, 2]	0.000 01	−13.099 951
……	……	……

由此表可以看出，当时间间隔越来越小时，平均速度趋于常数−13.1，这个常数被视为该运动员在 2 s 时的瞬时速度，即

$$v(2)=-13.1(\mathrm{m/s}),$$

这里“−”号表示这个运动员在 2 s 时的瞬时速度的方向是竖直向下的．我们把上述关于 2 s 时的瞬时速度用函数平均变化率的变化趋势描述如下：

$$当\Delta t趋近于0时，\frac{h(2+\Delta t)-h(2)}{\Delta t}趋近于-13.1.$$

我们也可以直接由 $\frac{h(2+\Delta t)-h(2)}{\Delta t}$ 看出这种变化趋势：

$$\begin{aligned}&\frac{h(2+\Delta t)-h(2)}{\Delta t}\\=&\frac{[10-4.9(2+\Delta t)^2+6.5(2+\Delta t)]-[10-4.9\times2^2+6.5\times2]}{\Delta t}\\=&\frac{-4\times4.9\Delta t-4.9\Delta t^2+6.5\Delta t}{\Delta t}\\=&-13.1-4.9\Delta t.\end{aligned}$$

当 Δt 趋近于 0 时，上式右端趋近于常数−13.1．这与前面取具体值计算的结果一致．

一般地，对任一时刻 t_0，也可以计算出瞬时速度：

$$\begin{aligned}&\frac{h(t_0+\Delta t)-h(t_0)}{\Delta t}\\=&\frac{[10-4.9(t_0+\Delta t)^2+6.5(t_0+\Delta t)]-[10-4.9t_0^2+6.5t_0]}{\Delta t}\\=&\frac{-2\times4.9t_0\cdot\Delta t-4.9(\Delta t)^2+6.5\Delta t}{\Delta t}\\=&-9.8t_0+6.5-4.9\Delta t.\end{aligned}\qquad (*)$$

当 Δt 趋近于 0 时，上式右端趋近于 $-9.8t_0+6.5$．❶这就是说，在 t_0 时刻，运动员的瞬时速度是 $-9.8t_0+6.5(\mathrm{m/s})$．

以上分析表明，当 Δt 趋近于 0 时，函数 $h(t)$ 在 t_0 到 $t_0+\Delta t$ 之间的平均变化率

$$\frac{h(t_0+\Delta t)-h(t_0)}{\Delta t}$$

趋近于常数

注

❶ Δt 趋近于 0 时，Δt 乘上任何常数仍然趋于 0.

$$-9.8t_0+6.5,$$

我们把这个常数称为 t_0 时刻的**瞬时速度**.

这时，同学们可能会问，常数 $-9.8t_0+6.5$ 可以在上面(*)式的最后结果中，令 $\Delta t=0$而得到. 为什么要用“趋近于0”来表述？这里，先向同学们说明两点：

(1) 在上面的例子中，我们研究的是平均速度趋近于某一时刻的变化过程，在这个变化过程中，时间间隔 Δt 越来越短，能越过任意小的时间间隔，但始终不能为 0.

(2) 当Δt 趋近于 0 时，存在着一个数 l 与商$\dfrac{h(t_0+\Delta t)-h(t_0)}{\Delta t}$无限地接近.

应当注意，我们这里研究的问题与以前学过的数学有质的不同. 这里研究的是两个变量 Δy 与 Δx 比值变化的性质与状态. 尽管 Δx，Δy 在变化中都趋近于 0，但是它们的比值却趋近于一个确定的常数.

由以上分析，我们给出函数瞬时变化率的概念.

设函数 $y=f(x)$在 x_0 及其附近有定义，当自变量在 $x=x_0$ 附近改变量为 Δx 时，函数值相应地改变

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

如果当 Δx 趋近于 0 时，平均变化率

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

趋近于一个常数 l，那么常数 l 称为函数$f(x)$在点 x_0 的**瞬时变化率**. 这样，运动的瞬时速度就是路程函数 $y=s(t)$的瞬时变化率.

“当 Δx 趋近于 0 时，$\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$趋近于常数 l” 可以用符号“→”（读作“趋近于”）记作

$$当\ \Delta x\to 0\ 时，\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\to l.$$

上述过程，通常也记作

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=l.$$

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的瞬时变化率，通常称为 $f(x)$在点 x_0 处的**导数**，并记作$f'(x_0)$.

这时又称 $f(x)$在点 x_0 处是可导的. 于是上述变化过程，可以记作

$$当\ \Delta x\to 0\ 时，\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\to f'(x_0)$$

或

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0).$$

如果 $f(x)$在开区间$(a，b)$内每一点 x 都是可导的，则称 $f(x)$在区间$(a，b)$可导. 这样，对开区间$(a，b)$内每个值 x，都对应一个确定的导数$f'(x)$. 于是，在区间$(a，b)$内，$f'(x)$构成一个新的函数，我们把这个函数称为函数$y=f(x)$的**导函数**. 记为 $f'(x)$或 y'（或 y'_x).

导函数通常简称为**导数**. 本书中，如果不特别指明求某一点的导数，那么求导数指的

就是求导函数.

例 1 火箭竖直向上发射. 熄火时向上速度达到100 m/s. 试问熄火后多长时间火箭向上速度为 0?

解: 火箭的运动方程为

$$h(t)=100t-\frac{1}{2}gt^2,$$

火箭向上位移是初速度引起的位移($100t$)与重力引起的位移$\left(-\frac{1}{2}gt^2\right)$的合成.

在 t 附近的平均变化率为

$$\frac{\left[100(t+\Delta t)-\frac{1}{2}g(t+\Delta t)^2\right]-\left[100t-\frac{1}{2}gt^2\right]}{\Delta t}$$

$$=\frac{100\Delta t-g\cdot t\cdot\Delta t-\frac{1}{2}g(\Delta t)^2}{\Delta t}$$

$$=100-gt-\frac{1}{2}g\Delta t.$$

当 $\Delta t\to 0$ 时, 上式趋近于 $100-gt$. 可见 t 时刻的瞬时速度

$$h'(t)=100-gt.$$

令

$$h'(t)=100-gt=0,$$

解得 $t=\frac{100}{g}\approx\frac{100}{9.8}\approx 10.2(\text{s})$.

所以火箭熄火后约 10.2 s 向上速度变为 0.

思考与讨论

火箭向上速度变为 0, 意味着什么? 你能计算出此火箭熄火后上升的最大高度吗?

例 2 一正方形铁板在 0 ℃时, 边长为 10 cm. 加热后铁板会膨胀. 当温度为 t ℃时, 边长变为 $10(1+at)$ cm, a 为常数. 试求铁板面积对温度的膨胀率.

解: 设温度的增量为 Δt, 则铁板面积 S 的增量

$$\Delta S=10^2[1+a(t+\Delta t)]^2-10^2(1+at)^2$$
$$=200(a+a^2t)\Delta t+100a^2(\Delta t)^2.$$

因此 $\frac{\Delta S}{\Delta t}=200(a+a^2t)+100a^2\Delta t.$

令 $\Delta t\to 0$, 得

$$S'=200(a+a^2t).$$

所以铁板对温度的膨胀率为 $200(a+a^2t)$.

探索与研究

研究圆面积与圆周长的关系

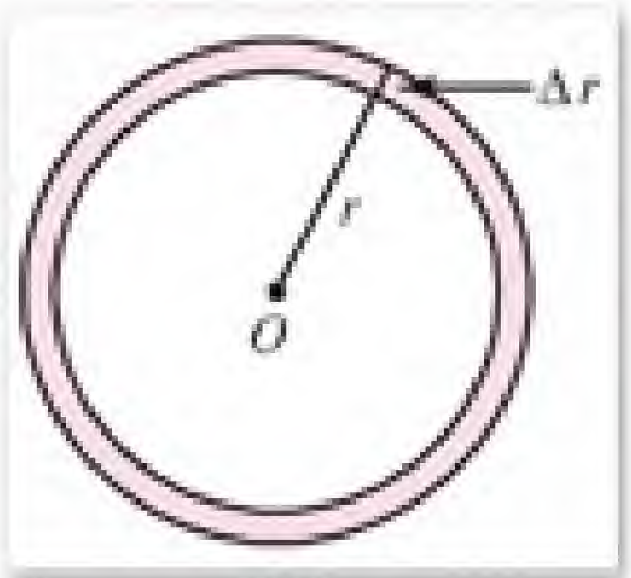


图 1-5

我们知道，圆面积 S 是半径 r 的函数，$S=\pi r^2$；圆周长 l 也是圆半径 r 的函数，$l=2\pi r$.

如图 1-5，利用导数的定义，一步步地求 S 对半径 r 的导数，说出每一步的几何意义，以及它与圆周长之间的关系.

类似地，讨论球的体积与球面积公式的关系. 由此，写一篇小论文，写写你对导数概念的理解.

练习A

1. 设一物体的运动方程是

$$s(t)=v_0t+\frac{1}{2}at^2,$$

其中 v_0 为初速度，a 为加速度，时间单位为 s. 求 $t=2$ s 的瞬时速度.

2. 一同学以 40 m/s 向上斜抛一块石头，抛掷方向与水平成 45° 角. 求石头所能达到的最高高度.

3. 求函数 $y=ax+b$ 的导数.

4. 如果一个函数的导数处处为 0，这个函数是什么函数?

练习B

1. 一同学在投掷场以 50 m/s 向上斜抛一枚手榴弹（练习用），抛掷方向与水平成 60° 角. 问手榴弹能掷多远?

2. 求函数 $y=ax^2+bx+c$ 在 $x=1$ 和 $x=2$ 处的导数.

1.1.3 导数的几何意义

设函数 $y=f(x)$ 的图象如图 1-6 所示. AB 是过点 $A(x_0, f(x_0))$ 与点 $B(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$ 的一条割线. 由此割线的斜率是

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

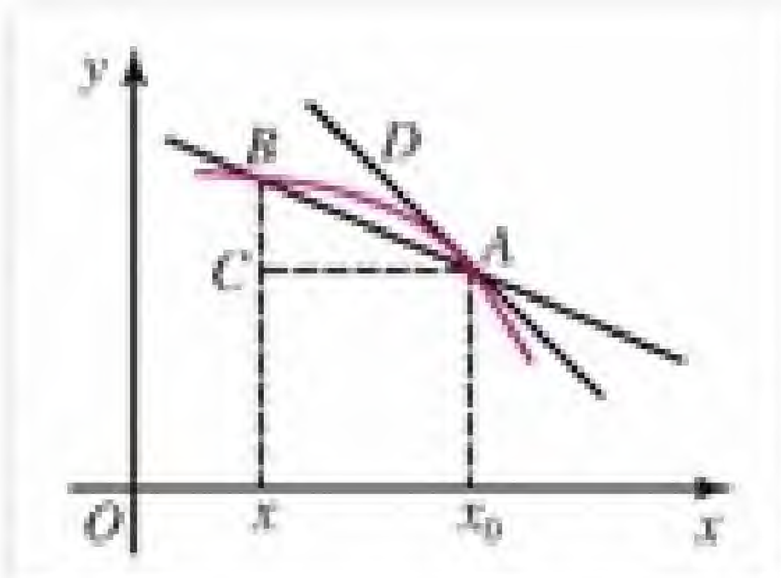


图 1-6

可知曲线割线的斜率就是函数的平均变化率. 当点 B 沿曲线趋近于点 A 时, 割线 AB 绕点 A 转动, 它的最终位置为直线 AD, 这条直线 AD 叫做此曲线在点 A 的切线. 于是, 当 $\Delta x\to 0$时, 割线 AB 的斜率趋近于在点 A 的切线 AD 的斜率, 即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\text{切线 } AD \text{ 的斜率}.$$

由导数意义可知, 曲线 $y=f(x)$在点$(x_0, f(x_0))$的切线的斜率等于 $f'(x_0)$.

例 1 求抛物线 $y=x^2$ 在点(1, 1)的切线的斜率.

解: 在点(1, 1)的切线的斜率是

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(1+\Delta x)^2-1}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}(2+\Delta x)=2.$$

因此, 抛物线在点(1, 1)的切线的斜率为 2.

例 2 求双曲线 $y=\frac{1}{x}$在点$\left(2, \frac{1}{2}\right)$的切线方程.

解: 因为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{2+\Delta x}-\frac{1}{2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{2(2+\Delta x)}=-\frac{1}{4},$$

所以这条双曲线在点$\left(2, \frac{1}{2}\right)$的切线的斜率为$-\frac{1}{4}$.

由直线方程的点斜式, 得切线方程为

$$y-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}(x-2),$$

即

$$y=-\frac{1}{4}x+1.$$

例 3 求抛物线 $y=x^2$ 过点$\left(\frac{5}{2}, 6\right)$的切线方程.

解: 点$\left(\frac{5}{2}, 6\right)$不在抛物线上, 设此切线过抛物线上的点$(x_0, x_0^2)$. 因为

$$\begin{aligned}&\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\\=&\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^2-x_0^2}{\Delta x}\\=&\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x_0\cdot\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}\\=&2x_0,\end{aligned}$$

所以此切线的斜率为 $2x_0$．又因为此切线过点 $\left(\frac{5}{2},\ 6\right)$ 和点 $(x_0,\ x_0^2)$，所以

$$\frac{x_0^2-6}{x_0-\frac{5}{2}}=2x_0,$$

即

$$x_0^2-5x_0+6=0.$$

解得 $x_0=2,\ 3$.

因此，过切点 $(2,\ 4)$，$(3,\ 9)$ 的切线方程分别为

$$y-4=4(x-2),$$
$$y-9=6(x-3).$$

即所求切线方程为

$$y=4x-4,$$
$$y=6x-9.$$

练习A

1. 已知曲线 $y=x^2$，分别求出曲线在点 $(0.3,\ 0.09)$，$(1,\ 1)$，$(3,\ 9)$ 的切线的斜率.

2. 求下列曲线在给定点的切线的斜率：

(1) $y=2x^2$，　$(1,\ 2)$；　(2) $y=x^2+1$，　$(1,\ 2)$；

(3) $y=3x-5$，　$(2,\ 1)$；　(4) $y=\frac{1}{x}$，　$(1,\ 1)$；

练习B

1. 已知曲线 $y=x^2-1$ 和其上一点，这点的横坐标为 -1，求曲线在这点的切线方程.

2. 设点 $(x_0,\ y_0)$ 是抛物线 $y=x^2+3x+4$ 上一点，求抛物线在点 $(x_0,\ y_0)$ 的切线方程.

习题 1－1 A

1. 已知质点按照规律 $s=2t^2+4t$（距离单位：m，时间单位：s）运动，求：

（1）质点开始运动后 3 s 内的平均速度；

（2）质点在 2 s 到 3 s 内的平均速度；

（3）质点在 3 s 时的瞬时速度.

2. 求下列函数的导数：

（1）$y=ax+b$；　　（2）$y=\frac{1}{x+2}$.

3. 已知 $f(x)=(x-1)^2$，求 $f'(x)$，$f'(0)$，$f'(2)$.

习题 1－1 B

1. 函数 $y=f(x)$ 的导函数与在 x_0 处的导数有什么区别？有什么联系？

2. 商 $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ 与 x 有关吗？令 $\Delta x\to 0$，x 是否应保持不变？

3. 分别求抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2$ 在点$(-2,\ 1)$和$(2,\ 1)$的切线方程.

4. 求抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2$ 过点$\left(4,\ \frac{7}{4}\right)$的切线方程.

1.2 导数的运算

1.2.1 常数函数与幂函数的导数

(1) 常数函数的导数.

设 $y=f(x)=C$, C 是常数.

$$C'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{C-C}{\Delta x}=0,$$

即 $C'=0$.

(2) 函数 $y=x$ 的导数.

设 $y=f(x)=x$.

$$x'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x}=1,$$

即 $x'=1$.

(3) 函数 $y=x^2$ 的导数.

设 $y=f(x)=x^2$.

$$\begin{aligned}(x^2)'&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x,\end{aligned}$$

即 $(x^2)'=2x$.

(4) 函数 $y=x^3$ 的导数.

设 $y=f(x)=x^3$.

$$\begin{aligned}(x^3)'&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}(3x^2+3x\Delta x+\Delta x^2)=3x^2,\end{aligned}$$

即 $(x^3)'=3x^2$.

(5) 函数 $y=\frac{1}{x}$的导数.

设 $y=f(x)=\frac{1}{x}$, $x\neq 0$.

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}\right)$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{x(x+\Delta x)}=-\frac{1}{x^2}$$ ❶.

即 $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$ $(x\neq 0)$.

注

❶ 在求导数时，当 $\Delta x\to 0$ 时，x 是不变的，应视为常数，常数的极限是其本身．这里还用到求极限的四则运算法则：

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{x(x+\Delta x)}$$

$$=\frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0}(-1)}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}(x^2+x\Delta x)}$$

$$=\frac{-1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}x^2+\lim\limits_{\Delta x\to 0}x\Delta x}$$

$$=\frac{-1}{x^2+x\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x}$$

$$=\frac{-1}{x^2+0}.$$

(6) 函数 $y=\sqrt{x}$ 的导数.

设 $y=f(x)=\sqrt{x}(x>0)$.

$$(\sqrt{x})'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}},$$

即 $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x>0)$.

至此，除常数函数外，我们已经导出了 5 个常见幂函数的求导公式．你有没有发现求幂函数的导函数的规律?

我们把这些幂函数的求导结果的形式改写一下，有

$$(x^1)'=1=1\cdot x^{1-1},$$
$$(x^2)'=2x=2x^{2-1},$$
$$(x^3)'=3x^2=3x^{3-1},$$
$$(x^{-1})'=\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}=-x^{-1-1},$$
$$(\sqrt{x})'=(x^{\frac{1}{2}})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}.$$

由此我们推测，对任意幂函数 $y=x^{\alpha}$，当 $\alpha\in\mathbf{Q}$ 时，都有

$$(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}.$$

例如：

如果 $y=x^8$，　则 $y'=(x^8)'=8x^7$；

如果 $y=x^{12}$，　则 $y'=(x^{12})'=12x^{11}$；

如果 $y=x^{\frac{4}{3}}$，　则 $y'=(x^{\frac{4}{3}})'=\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$.

事实上，可以证明上面幂函数的求导公式，对任意实数幂都成立．现在，我们要证明它还有困难．只要求会使用它求幂函数的导数就可以了．但对上面几个常见的幂函数的求导公式要理解它们的推导过程.

我们约定，本章所涉及到的函数，如果没有特别说明，指的都是初等函数.

练习A

1. 试说明 $c'=0$ 和 $x'=1$ 的几何意义.
2. 求下列幂函数的导函数：
   (1) $y=x^{15}$；　　　　(2) $y=x^{-3}(x\neq 0)$；
   (3) $y=x^{\frac{1}{4}}(x>0)$；　　　　(4) $y=x^{\frac{2}{3}}(x>0)$.
3. 求函数 $y=x^5$，在 $x=2$ 处的导数.
4. 求三次曲线 $y=x^3$ 在点(2，8)的切线方程.

练习B

1. 求出下列函数的导数：
   (1) $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$；　　　　(2) $f(x)=x^{-\frac{1}{3}}$.
2. 分别求出曲线 $y=\sqrt{x}$在点(1，1)与点$(2，\sqrt{2})$的切线方程.
3. 已知 $f(x)=x^4$，求证：$f'(x)=4x^3$.
   (提示：展开$(x+\Delta x)^4$，用 x 和 Δx 的幂表示.)
4. 设曲线 $y=2x^3$ 在点$(a，2a^3)$的切线与直线 $x=a$，$y=0$ 所围成的三角形面积为 $\frac{1}{3}$，求 a.

探索与研究

使用能够进行符号运算的数学软件，在计算界面上，使用展开、化简、求极限的命令语句，验证本节根据导数的定义推导的一些幂函数的求导公式.

1.2.2 导数公式表及数学软件的应用

1. 基本初等函数导数公式表

在科学研究和工程计算中，经常要使用一些初等函数的导数. 为了方便并减少重复的劳动，数学工作者制作出常用函数的求导公式表，供大家使用. 这里仅列出基本初等函数的求导公式表，供同学们做练习时查用.

基本初等函数的导数公式表

$y=f(x)$	$y'=f'(x)$
$y=c$	$y'=0$
$y=x^n(n\in\mathbf{N}_+)$	$y'=nx^{n-1}$，n 为正整数
$y=x^\mu(x>0,\ \mu\neq0$ 且 $\mu\in\mathbf{Q})$	$y'=\mu x^{\mu-1}$，μ 为有理数
$y=a^x(a>0,\ a\neq1)$	$y'=a^x\ln a$❶
$y=\log_a x\ (a>0,\ a\neq1,\ x>0)$	$y'=\dfrac{1}{x\ln a}$
$y=\sin x$	$y'=\cos x$
$y=\cos x$	$y'=-\sin x$

注

❶ $\ln a=\log_e a$，称为 a 的自然对数，其底为 e，e 是一个和 π 一样重要的无理数

e=2.718 281 828 4….

注意 $(e^x)'=e^x$，$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$.

探索与研究

在单位圆中，探索并研究

$$(\sin x)'=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\cos x,$$

$$(\cos x)'=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}=-\sin x.$$

2. 数学软件的应用

查表求函数的导数，现在科研人员甚至大学生都很少使用了. 由于计算机性能的提高和广泛普及，人们可以使用数学应用软件进行导数的计算. 再复杂的函数，使用数学软件进行计算，只是瞬间的事. 现在广泛使用的数学软件很多，如 Maple、Matlab、Mathcad 等. 下面举例说明.

例 求下列函数的导数：

$$f(x)=x^5+2x^4+x^3;$$

$$g(x)=3^x+\ln x;$$

$$h(x)=\cos x+\sin x.$$

解：启动 Maple，在界面内输入

```
> diff(x^5+2*x^4+x^3, x);
```

$$5x^4+8x^3+3x^2$$

```
> diff(3^x+ln(x), x);
```

$$3^x\ln(3)+\frac{1}{x}$$

```
> diff(cos(x)+sin(x), x);
```

$$-\sin(x)+\cos(x)$$

即

$$f'(x)=5x^4+8x^3+3x^2;$$
$$g'(x)=3^x\ln 3+\frac{1}{x};$$
$$h'(x)=-\sin x+\cos x.$$

练习A

1. 写出下列函数的导数：

$y=x^5$，　$y=x^{12}$，　$y=x^{-3}$，　$y=x^{0.3}$，　$y=x^{108}$.

2. 写出下列函数的导数：

$y=\cos x$，　$y=\sin x$，　$y=2^x$，　$y=\ln x$，　$y=e^x$.

3. 求曲线 $y=x^4$ 在点(1，1)处的切线方程.

练习B

1. 求下列函数在给定点的导数：

(1) $y=x^{\frac{1}{4}}$，$x=16$；　　(2) $y=\sin x$，$x=\frac{\pi}{2}$；

(3) $y=\cos x$，$x=2\pi$.

2. 求余弦曲线 $y=\cos x$ 在点$\left(\frac{\pi}{2}，0\right)$的切线方程.

3. 求曲线 $y=\sqrt{x}$在点$(3，\sqrt{3})$的切线方程.

计算机上的练习

验证本节导数公式表中的公式.

1.2.3 导数的四则运算法则

初等函数是由基本初等函数经过四则运算、乘方、开方和各种复合运算构成. 初等函数的导数可以经过基本初等函数导数的运算而求得. 我们在知道基本初等函数的导数公式的前提下，可以求得许多较为复杂的函数的导数.

1. 函数和(或差)的求导法则

设 $f(x)$, $g(x)$是可导的，则

$$\boxed{(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x).}$$

即，**两个函数的和(或差)的导数，等于这两个函数的导数和(或差).**

证明：设 $y=f(x)+g(x)$，则

$$\begin{aligned}\Delta y&=f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)-[f(x)+g(x)]\\&=[f(x+\Delta x)-f(x)]+[g(x+\Delta x)-g(x)]\\&=\Delta f+\Delta g.\end{aligned}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta f}{\Delta x}+\frac{\Delta g}{\Delta x},$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}+\frac{\Delta g}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta g}{\Delta x},$$

即 $y'=(f+g)'=f'+g'$，同理可证 $(f-g)'=f'-g'$.

这个法则可推广到任意有限个函数，即

$$(f_1\pm f_2\pm\cdots\pm f_n)'=f_1'\pm f_2'\pm\cdots\pm f_n'.$$

根据函数导数的定义，同样可以证明两个函数之积与商的求导法则.

2. 函数积的求导法则

设 $f(x)$, $g(x)$是可导的，则

$$\boxed{[f(x)g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x).}$$

即，**两个函数的积的导数，等于第一个函数的导数乘上第二个函数，加上第一个函数乘上第二个函数的导数.**

由上述法则立即可以得出

$$[Cf(x)]'=Cf'(x).$$

即，**常数与函数之积的导数，等于常数乘以函数的导数.**

3. 函数的商的求导法则

设 $f(x)$，$g(x)$是可导的，$g(x)\neq 0$，则

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

特别是当 $f(x)\equiv 1$ 时，有

$$\left[\frac{1}{g(x)}\right]'=-\frac{g'(x)}{g^2(x)}.$$

例 1　求多项式函数 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 的导数.

解：$f'(x)=(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n)'$

$=(a_0x^n)'+(a_1x^{n-1})'+\cdots+(a_{n-1}x)'+(a_n)'$

$=a_0nx^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}.$

例 2　求 $y=x\sin x$ 的导数.

解：$y'=(x\cdot\sin x)'$

$=x'\sin x+x(\sin x)'$

$=\sin x+x\cos x.$

例 3　求 $y=\sin 2x$ 的导数.

解：$y'=(2\sin x\cos x)'=2(\cos x\cos x-\sin x\sin x)$

$=2\cos 2x.$

例 4　求 $y=\tan x$ 的导数.

解：$y'=\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'=\dfrac{\cos x\cos x+\sin x\sin x}{\cos^2 x}$

$=\dfrac{1}{\cos^2 x}.$

例 5　已知可导函数 $y=f(u)$，且 $u=ax+b$（a，b 为常数，$a\neq 0$），求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$❶.

解：设 x 有一改变量 Δx，则对应的 u，y 分别有改变量 Δu，Δy，由

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x},$$

注

❶ $y=f(x)$ 的导数 $y'=f'(x)$ 又可记为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y'=f'(x).$$

特别是当 $y=f(u(x))$ 是 x 的复合函数时，记号$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$明确表示对 x 求导数. 它和$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}$是不同的. 两者的关系是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

而

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u'(x)=a,$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=a[f(u)]_u'.$$

再将 $u=ax+b$ 代入上式便得到$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

由例 5 的结论，我们可更方便地求出一些函数的导数，例如：

$$[(5x+3)^5]'=5(u^5)_u'=5\times 5u^4=25(5x+3)^4;$$

$$(\sin 2x)'=2(\sin u)_u'=2\cos u=2\cos 2x;$$

$$\left[\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\right]'=2(\sin u)_u'=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right).$$

探索与研究

设 $y=k_1u$，又 $u=k_2x$，你能写出 y 与 x 的函数关系吗？你能从 y_u'，u_x' 求出 y_x' 吗？

设 $y=f(u)$，又 $u=g(x)$，你能写出 y 与 x 的函数关系吗？你能从 y_u'，u_x' 求出 y_x' 吗？

练习A

1. 求下列函数的导数：

(1) $y=x^7+x^5-3x^3$；　　(2) $y=x+x^{-1}$；

(3) $y=x^3-\cos x$；　　(4) $y=x^2+2\cos x$.

2. 求下列函数的导数：

(1) $y=(3x^2+2)(x-5)$；　　(2) $y=(5x^2-7)(3x+8)$；

(3) $y=\frac{x}{x^2+1}$；　　(4) $y=\frac{\sin x}{x}$.

3. 求下列函数的导数：

(1) $y=(3x+5)^2$；　　(2) $y=(5x-7)^8$.

4. 求 $f(x)=(x^2-3x+1)e^x$ 的导数，并在函数曲线上求出点，使得曲线在这些点处的切线与 x 轴平行.

练习B

1. 求二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的导数.
2. 求下列函数的导数：
   (1) $y=x+\sqrt{x}$；　　(2) $y=x-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$；
   (3) $y=\dfrac{ax^2+bx}{cx^2+d}$；　　(4) $y=\dfrac{1}{\cos x}$；
   (5) $y=\sin(3x+5)$；　　(6) $y=(x^2+1)\sqrt{x}$.
3. 已知抛物线 $y=x^2+3x-5$，求此抛物线在点(3，13)处的切线方程.
4. 求下列函数的导数：
   (1) $y=\cos(3x+5)$；　　(2) $y=\sin(\omega t+\varphi)$（ω，φ 是常数）；
   (3) $y=\ln(5x+4)$；　　(4) $y=3^{2x-1}$.

习题1-2 A

1. 求下列函数的导数：
   (1) $y=x+x^3+x^5$；　　(2) $y=x^3+\sin x$；
   (3) $y=x^3\sin x$；　　(4) $y=(2+3x)(3-5x+x^2)$；
   (5) $y=\dfrac{3-x^2}{3+x^2}$；　　(6) $y=\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$.
2. 求下列函数在指定点的导数：
   (1) $y=x\sin x$，$x=\dfrac{\pi}{4}$；　　(2) $y=\dfrac{x}{1+x^2}$，$x=1$.
3. 求下列曲线在给定点的切线方程：
   (1) $y=x^2$，(2，4)；　　(2) $y=x^3$，$\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{8}\right)$.
4. 求曲线 $y=2x-x^3$ 在点(−1，−1)的切线的倾斜角.
5. 求曲线 $y=x^3+x$ 在点(0，0)的切线方程.
6. 求正弦型曲线 $y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 在点 $\left(\dfrac{\pi}{4},0\right)$ 的切线方程.
7. 求正弦函数 $f(x)=\sin x$ 在区间 $[0,2\pi]$ 内，使 $f'(x)=0$ 的 x 的值. 说明曲线在这些点的切线有什么特征?
8. 已知曲线 $y=x^3+3x$，求这条曲线平行于直线 $y=15x+2$ 的切线方程.
9. 已知曲线 $y=2x^3+3x^2-12x+1$，求这条曲线的与 x 轴平行的切线方程.
10. 求下列函数的导数：

(1) $y=(3x-5)^{10}$；　　(2) $y=\ln(5x+7)^5$；

(3) $y=\sqrt{2x-5}$；　　(4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{1+3x}}$.

11. 求下列函数的导数：

(1) $y=(2x-1)^2(2-3x)^3$；　　(2) $y=(3x+2)\sin 5x$；

(3) $y=e^{2x}\cos 3x$；　　(4) $y=2^x e^x$.

习题 1-2 B

1. 求下列函数的导数：

(1) $y=\cos 3x\sin 2x$；　　(2) $y=(1+\cos x)\sin x$；

(3) $y=(x+1)(x+2)(x+3)$；　　(4) $y=x^2(x+1)(x-2)$.

2. 已知曲线 $y=x^3-2x$ 和其上一点，这点的横坐标为 2，求曲线在这点的切线方程.

3. 求正切曲线 $y=\tan x$ 在点 $\left(\dfrac{\pi}{4}, 1\right)$ 的切线方程.

4. 求下列函数的导数：

(1) $y=2(5x-4)^2$；　　(2) $y=(7x-4)^{81}$；

(3) $y=(3x-5)^{\frac{1}{4}}$；　　(4) $y=e^{2x+1}$.

5. 设质点 M 沿 x 轴作直线运动，在时刻 t(s)，质点所在的位置为 $x=t^2-5t+6$(m). 求从 1 s 到 3 s 这段时间内质点 M 的平均速度，质点 M 在什么时刻的瞬时速度等于这段时间内的平均速度？

6. 从时刻 $t=0$ 开始的 t (s) 内，通过某导体的电量(单位：库仑)可以由公式 $q=2t^2+3t$ 表示. 求第 5 秒时和第 7 秒时的电流强度 q'_t. 说明什么时刻电流强度达到 43 A？

7. 设 l 是 $y=\dfrac{1}{x}$ 图象的一条切线，证明 l 与坐标轴所围成的三角形的面积与切点无关.

1.3 导数的应用

1.3.1 利用导数判断函数的单调性

竖直上抛一个小沙袋，沙袋高度 h 是时间 t 的函数．设

$$h=h(t),$$

其图象如图 1-7 所示．横轴表示时间，纵轴表示沙袋的高度，设沙袋的最高点为 A，其横坐标为 $t=t_0$．

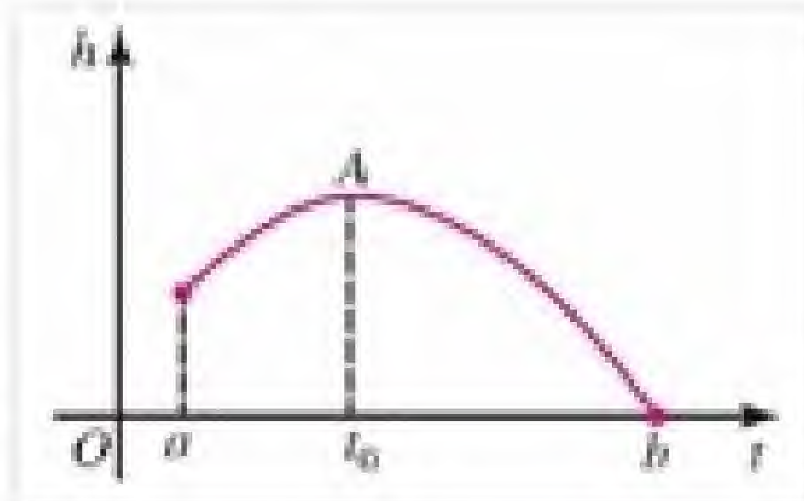


图 1-7

先考察沙袋在区间(a,t_0)的运动情况：

根据生活经验，我们知道，在这个区间内，沙袋向上运动，其竖直向上的瞬时速度大于 0．即，在区间(a,t_0)，

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta h}{\Delta t}=h'(t)>0.$$

我们说在此区间内，函数 $h=h(t)$是增函数．

再考察沙袋在区间(t_0,b)的运动情况：

在这个区间内，沙袋向下运动，其竖直向上的瞬时速度小于 0．即，在区间(t_0,b)，

$$h'(t)<0.$$

我们说在此区间内，函数 $h=h(t)$是减函数．

从以上实例能够看出，可以通过函数的导数来判断函数的单调性．我们进而得出用函数导数判断函数单调性的法则：

1. 如果在(a,b)内，$f'(x)>0$，则 $f(x)$在此区间是增函数，(a,b)为 $f(x)$的单调增区间；

2. 如果在(a,b)内，$f'(x)<0$，则 $f(x)$在此区间是减函数，(a,b)为 $f(x)$的单调减区间．

我们可以用 $s(t)$与瞬时速度 $v(t)$的关系来说明这个法则的正确性：

当 $v(t)=s'(t)>0$ 时，$s(t)$是增函数；当 $v(t)=s'(t)<0$ 时，$s(t)$是减函数．

我们还可以用函数曲线的切线的斜率来理解这个法则：

当切线斜率为正时，切线的倾斜角小于 90°，函数曲线呈上升状态．当切线斜率为负时，函数曲线呈下降状态(图 1-8)．

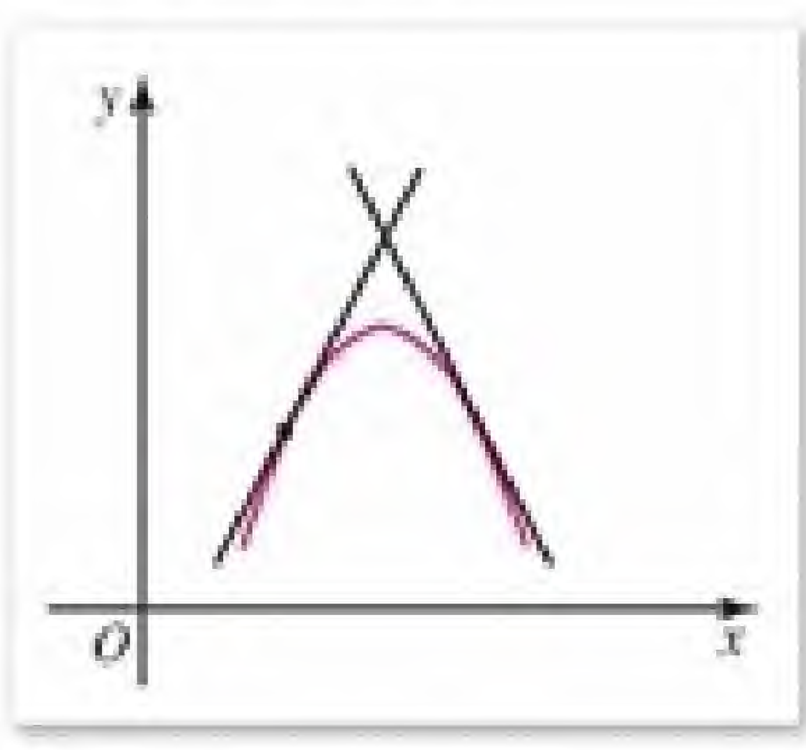


图 1-8

如果函数 $y=f(x)$在 x 的某个开区间内，总有 $f'(x)>0$，则$f(x)$在这个区间上是增函数；如果函数 $y=f(x)$在 x 的某个开区间内，总有 $f'(x)<0$，则 $f(x)$在这个区间上是减函数．

例 1 如图 1-9，设有圆 C 和定点 O，当 l 从 l_0 开始在平面上绕 O 匀速旋转（旋转角度不超过 90°）时，它扫过的圆内阴影部分的面积 S 是时间 t 的函数，它的图象大致是图 1-10 所示的四种情况中的哪一种？

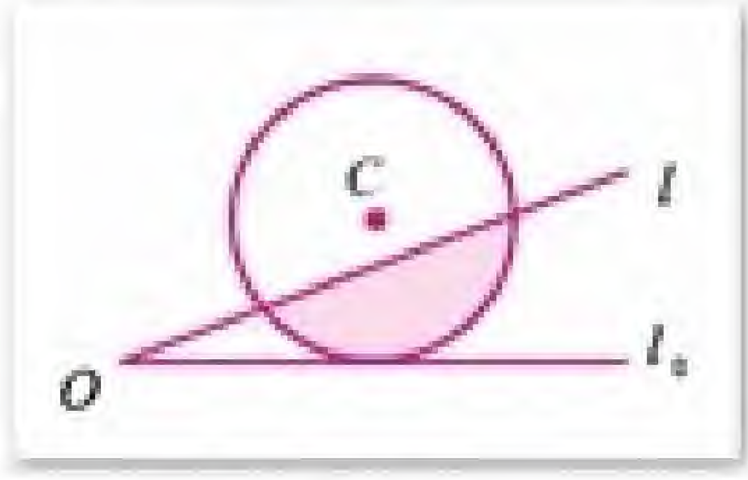


图 1-9

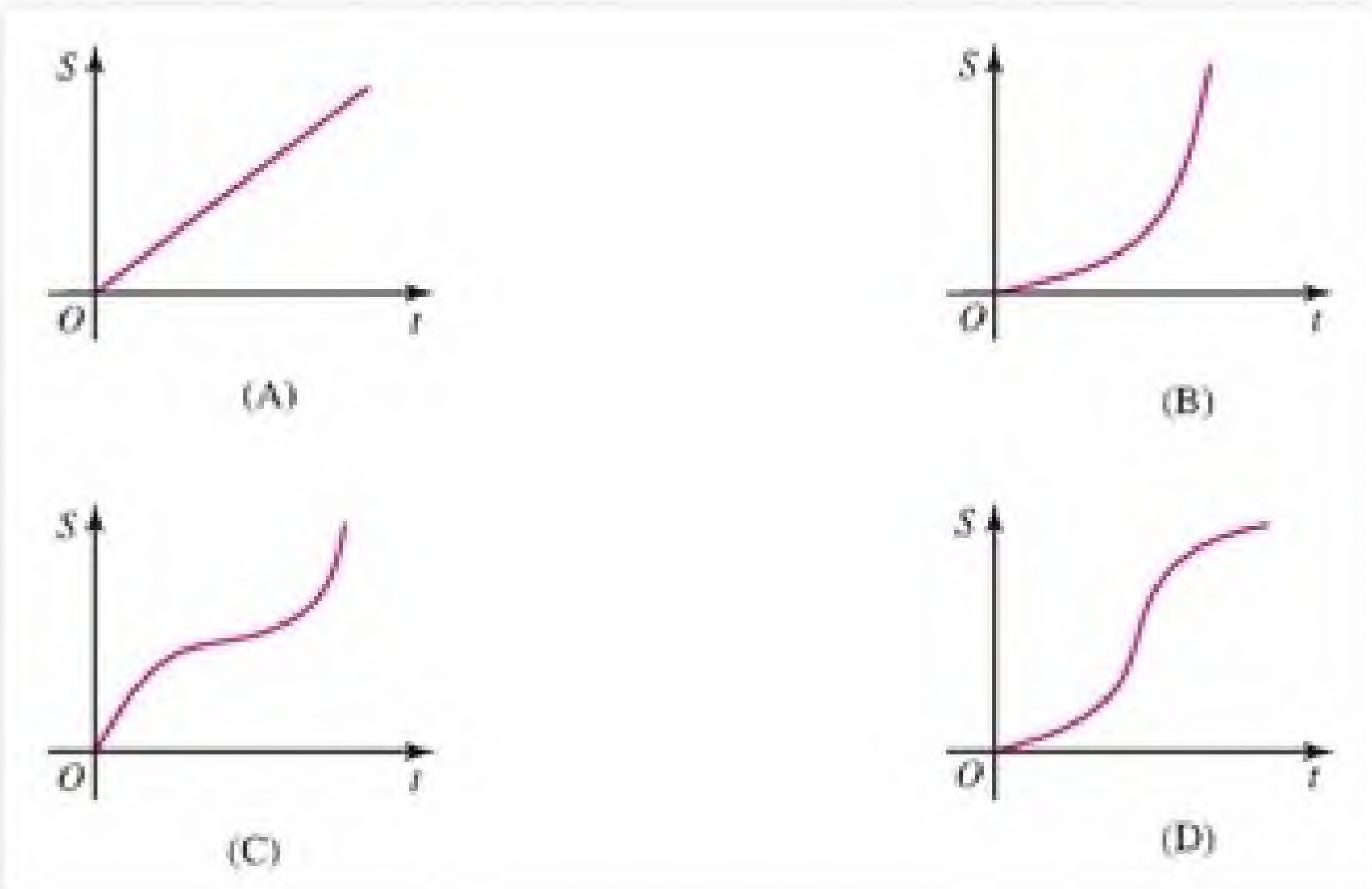


图 1-10

解：由于是匀速旋转，阴影部分面积 $S(t)$ 开始和最后时段缓慢增加，中间时段 S 增速快.

图(A)表示 S 的增速是常数，与实际不符，图(A)应否定；

图(B)表示最后时段 S 增速快，也与实际不符，(B)也应否定；

图(C)表示开始时段增速和最后时段 S 增速比中间时段快，也应否定；

图(D)表示开始和结束阶段，S 增速慢，中间时段增速快，符合实际，应选 (D).

例 2 确定函数

$$y=x^2-2x+4$$

在哪个区间内是增函数，哪个区间内是减函数.

解：$y'=2x-2$.

令 $2x-2>0$，

解此不等式，得 $x>1$.

因此，已知函数在区间 $(1, +\infty)$ 内是增函数.

令 $2x-2<0$，

解此不等式，得 $x<1$.

因此，已知函数在区间 $(-\infty, 1)$ 内是减函数（图 1-11）.

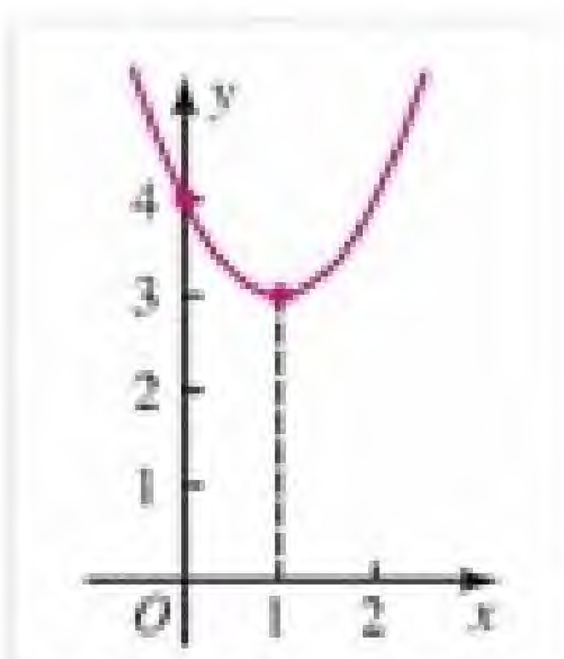


图 1-11

例 3 找出函数 $f(x)=x^3-4x^2+x-1$ 的单调区间❶.

注

❶ 单调区间指单调增区间或单调减区间.

解：$f'(x)=3x^2-8x+1$.

令 $3x^2-8x+1>0$，

解此不等式，得 $x<\dfrac{4-\sqrt{13}}{3}$ 或 $x>\dfrac{4+\sqrt{13}}{3}$.

因此，区间$\left(-\infty,\ \dfrac{4-\sqrt{13}}{3}\right)$和$\left(\dfrac{4+\sqrt{13}}{3},\ +\infty\right)$为 $f(x)$的单调增区间.

令 $3x^2-8x+1<0$，

解此不等式，得

$$\frac{4-\sqrt{13}}{3}<x<\frac{4+\sqrt{13}}{3}.$$

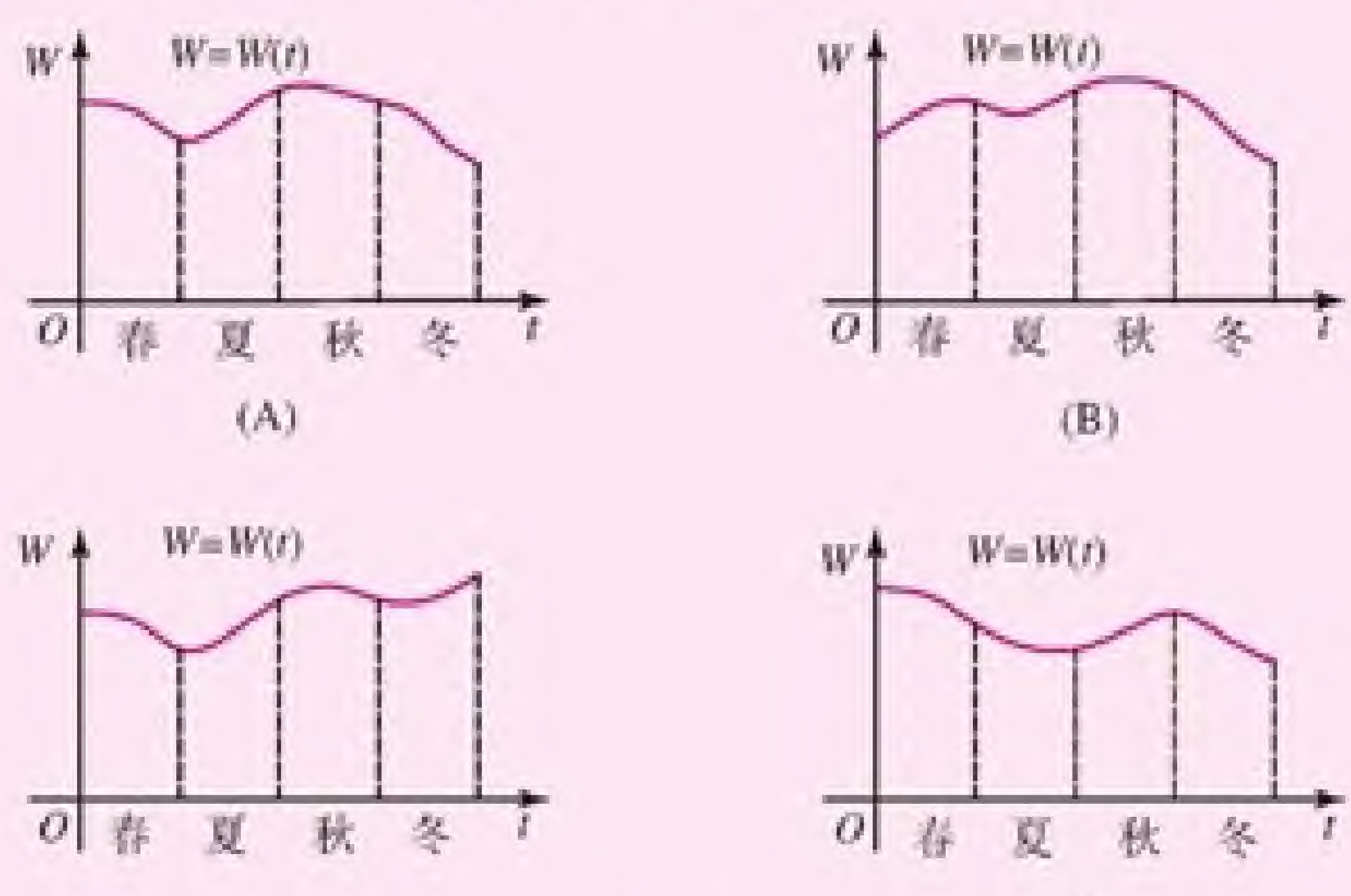
因此，区间$\left(\dfrac{4-\sqrt{13}}{3},\ \dfrac{4+\sqrt{13}}{3}\right)$为 $f(x)$的单调减区间.

计算机上的练习

使用计算机作图软件画出例 2、例 3 中函数的图象，观察它们的单调性.

练习A

1. 一水库的蓄水量一年四季有明显变化. 春季雨量较少，用水最多；夏季雨量最多，用水较少；秋季雨量和用水一般；冬季雨量最少，用水较多. 下列蓄水量(W)与时间(t)关系图中哪一个符合实际？答：(　　).



(A)　(B)　(C)　(D)

(第 1 题)

2. 试确定函数 $y=x^2-5x+6$ 的单调区间.

3. 试确定函数 $y=\frac{1}{x+1}$ 的单调区间.

4. 求 $f(x)=(x^2-\frac{3}{2}x)e^x$ 为增函数的区间.

练习B

1. 讨论函数 $y=\sin x$ 在区间$(0,\ 2\pi)$的单调性.
2. 讨论函数 $y=x^3-8x^2+13x-6$ 的单调性.
3. 求证：当 $x<2$ 时，$x^3-6x^2+12x-1<7$.

1.3.2 利用导数研究函数的极值

在群山之中，各个山峰的顶端，虽然不一定是群山的最高处，但它却是其附近的最高点．同样，各个谷底虽然不一定是群山之中的最低处，但它却是附近的最低点．群山的最高处是所有山峰中的最高者的顶部，群山中的最低处是所有谷底的最低者的底部.

由此启发我们引出极值的概念，并经由极值求函数的最大(小)值.

已知函数 $y=f(x)$，设 x_0 是定义域 $(a,\ b)$ 内任一点，如果对 x_0 附近的所有点 x，都有

$$f(x)<f(x_0),$$

则称函数 $f(x)$在点 x_0 处取**极大值**. 记作$y_{极大}=f(x_0)$．并把 x_0 称为函数$f(x)$的一个**极大值点**．如果在 x_0 附近都有

$$f(x)>f(x_0),$$

则称函数 $f(x)$在点 x_0 处取**极小值**，记作 $y_{极小}=f(x_0)$．并把 x_0 称为函数$f(x)$的一个**极小值点**.

极大值与极小值统称为**极值**．极大值点与极小值点统称为**极值点**.

函数 $f(x)$的最大(小)值是函数在指定区间的最大(小)的值.

应注意，极值与最值不同，极值只是对一点附近而言，是局部最值；而最值是对整个区间或是对所考察问题的整体而言.

下面，我们研究如何利用导数求函数的极值.

观察图 1-12，我们可以看到曲线 $y=f(x)$在极值点 x_1，x_2，x_3 处的切线与 x 轴平行

或重合，即在这些极值点处，

$$f'(x_1)=0,\quad f'(x_2)=0,\quad f'(x_3)=0.$$

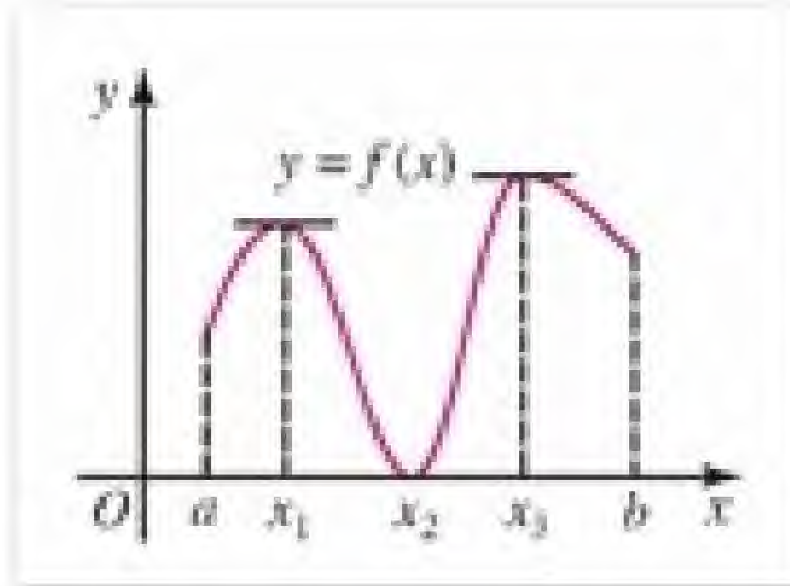


图 1-12

我们有如下结论：设 $x=x_0$ 是 $y=f(x)$ 的极值点，且 $f(x)$在 $x=x_0$ 是可导的，则必有 $f'(x_0)=0$.

再观察一下在极大值点与极小值点附近函数及其导数的取值情况：

(1) 在 $x=x_1$ 处，$f'(x_1)=0$，在 x_1 左侧，$f'(x)>0$，函数是增加的；在 x_1 右侧，$f'(x)<0$，函数是减少的. x_1 是 $f(x)$的极大值点.

(2) 在 $x=x_2$ 处，$f'(x_2)=0$，在 x_2 左侧，$f'(x)<0$，函数是减少的；在 x_2 右侧，$f'(x)>0$，函数是增加的. x_2 是$f(x)$的极小值点.

(3) 在 $x=x_3$ 处，$f'(x_3)=0$，在 x_3 左侧，$f'(x)>0$，函数是增加的；在 x_3 右侧，$f'(x)<0$，函数是减少的. x_3 是 $f(x)$的极大值点.

综合以上分析，我们得到求函数 $y=f(x)$极值的如下方法：

第 1 步　求导数 $f'(x)$；

第 2 步　求方程 $f'(x)=0$ 的所有实数根；

第 3 步　考察在每个根 x_0 附近，从左到右，导函数$f'(x)$的符号如何变化. 如果 $f'(x)$的符号由正变负，则$f(x_0)$是极大值；如果由负变正，则 $f(x_0)$是极小值.

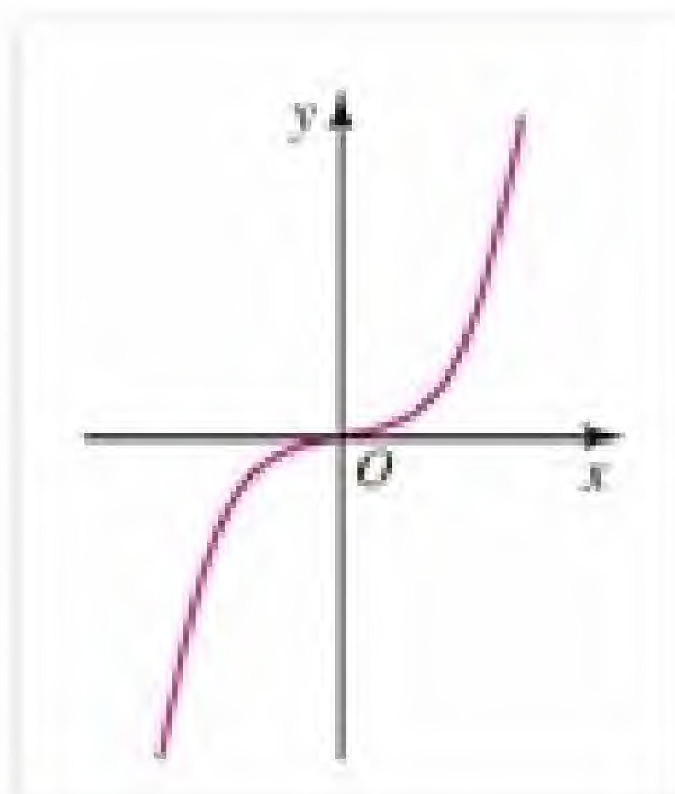


图 1-13

如果在 $f'(x)=0$ 的根 $x=x_0$ 的左、右侧，$f'(x)$的符号不变，则 $f(x_0)$不是极值. 例如函数 $f(x)=x^3$（图 1-13），有 $f'(0)=0$，但$x=0$不是极值点. 这就是说，$f'(x)=0$的根不一定都是函数的极值点. 由此可见，可导函数 $f(x)$在点 x_0 取得极值的充分必要条件是 $f'(x_0)=0$，且在 x_0 左侧与右侧，$f'(x)$的符号不同. 很明显，$f'(x_0)=0$ 是 x_0 为极值点的必要条件，并非充分条件.

如何求函数的最大(小)值呢？假设函数 $y=f(x)$在闭区间$[a,b]$上的图象是一条连续不间断的曲线，则该函数在$[a,b]$一定能够取得最大值与最小值，函数的最值必在极值点或区间端点取得. 由于可导函数在区间(a,b)内的极值只可能在使 $f'(x)=0$ 的点取得，因此把函数在区间端点的值与区间内使 $f'(x)=0$ 的点的值作比较，最大者必为函数在$[a,b]$上的最大值，最小者必为最小值.

例如，函数 $y=f(x)$的图象如图 1-14 所示，函数在 $x=x_0$处取得最小值 $f(x_0)$，在端点 $x=b$ 取得最大值 $f(b)$.

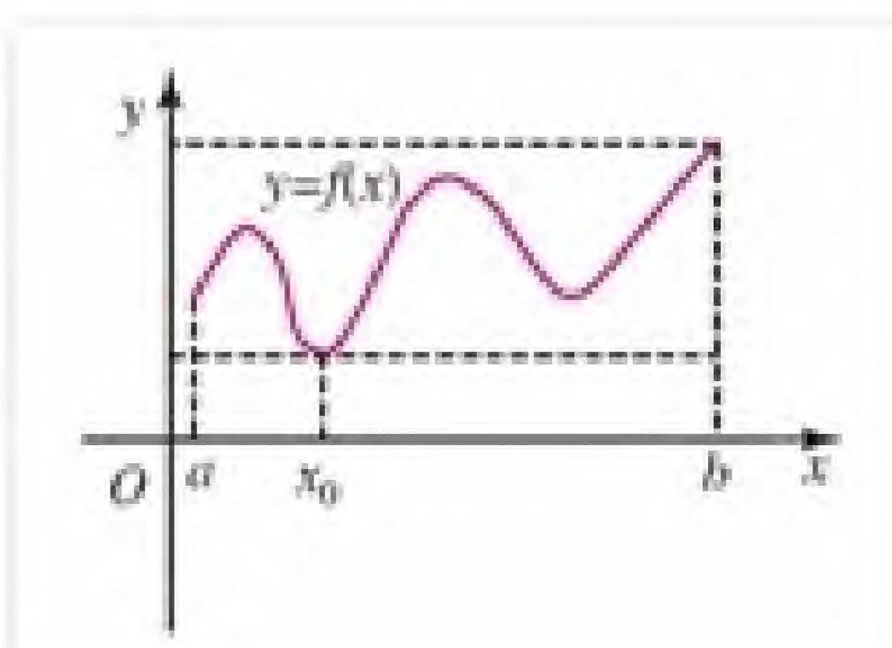


图 1-14

求函数 $y=f(x)$在$[a,b]$的最大(小)值步骤如下：

第 1 步　求 $f(x)$在开区间(a,b)内所有使 $f'(x)=0$ 的点；

第 2 步　计算函数 $f(x)$在区间内使 $f'(x)=0$ 的所有

点和端点的函数值，其中最大的一个为最大值，最小的一个为最小值.

例 已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+4$：

(1) 求函数的极值，并画出函数的大致图象；

(2) 求函数在区间$[-3,4]$上的最大值和最小值.

解：(1) $f'(x)=x^2-4$，

解方程 $x^2-4=0$，

得 $x_1=-2$，$x_2=2$.

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$变化状态如下表：

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$9\frac{1}{3}$	↘	$-1\frac{1}{3}$	↗

从表上看出，当 $x=-2$ 时，函数有极大值，且

$$f(-2)=\frac{1}{3}\times(-2)^3-4\times(-2)+4=9\frac{1}{3}.$$

而当 $x=2$ 时，函数有极小值，且

$$f(2)=\frac{1}{3}\times2^3-4\times2+4=-1\frac{1}{3}.$$

函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+4$ 的图象如图 1-15 所示.

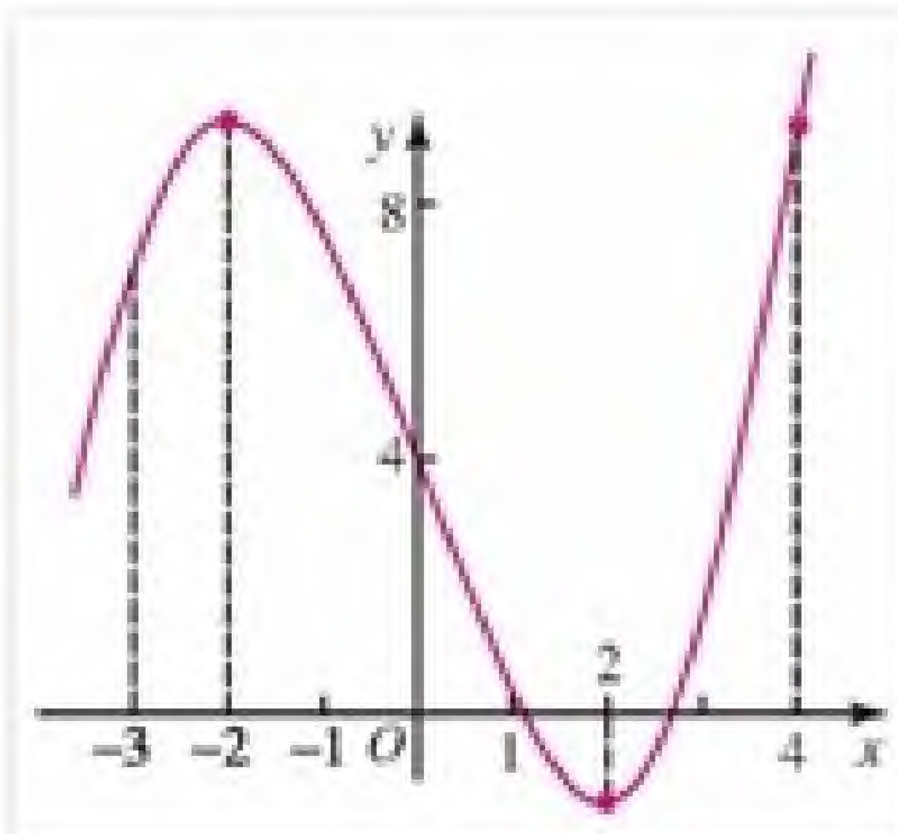


图 1-15

(2) $f(-3)=\frac{1}{3}\times(-3)^3-4\times(-3)+4=7$，

$f(4)=\frac{1}{3}\times4^3-4\times4+4=9\frac{1}{3}$.

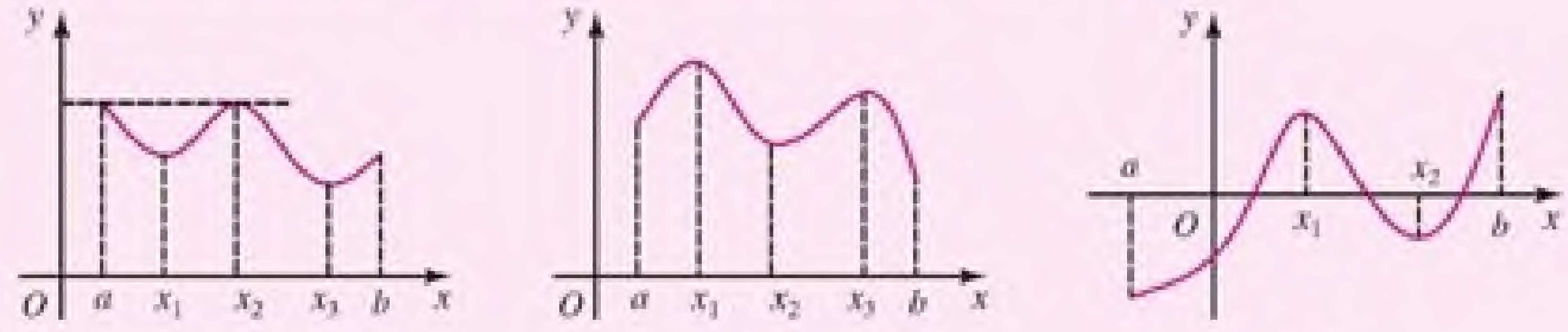
与极值点的函数值比较，得到该函数在区间$[-3,4]$上的最大值是 $9\frac{1}{3}$，最小值是$-1\frac{1}{3}$.

思考与讨论

在区间$[-3,5]$上，函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+4$ 的最大值是多少？

练习A

1. 请根据给出的函数图象指出函数的极值点和最大(小)值点.



(A)　　(B)　　(C)

(第1题)

2. 求下列函数的极值：

(1) $y=x^2-7x+6$；　　(2) $y=3x^4-4x^3$；

(3) $y=x+2\sin x$，$x\in(0, 2\pi)$.

3. 说明函数 $y=\lg x$，$y=ax+b$ $(a\neq 0)$在$(0, +\infty)$为什么没有极值.

4. 试找出函数 $f(x)=-\frac{4}{3}x^3+x+1$ 的极大值点和极小值点.

练习B

1. 求函数 $f(x)=2x^3-15x^2+36x-24$ 在区间$\left[1, \frac{13}{4}\right]$上的最大值与最小值.

2. 求函数 $f(x)=(x-1)[2x^2-(3a+4)x+9a-4]$在$[0, 3]$上的最大值与最小值，其中$0<a<2$.

3. 求一元二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的单调区间，最大值或最小值.

4. 设 $f(x)=ax^3+3x+2$ 有极值，求 a 的取值范围，并求出极大值点与极小值点.

1.3.3 导数的实际应用

在经济生活中，人们经常遇到最优化问题. 例如，为使经营利润最大、生产效率最高，或为使用力最省、用料最少、消耗最省等等，需要寻求相应的最佳方案或最佳策略，这些都是最优化问题. 导数是解决这类问题的基本方法之一. 现在，我们研究几个典型的

实际问题.

例 1 如图 1-16 所示，现有一块边长为 a 的正方形铁板，如果从铁板的四个角各截去一个相同的小正方形，做成一个长方体形的无盖容器. 为使其容积最大，截下的小正方形边长应为多少?

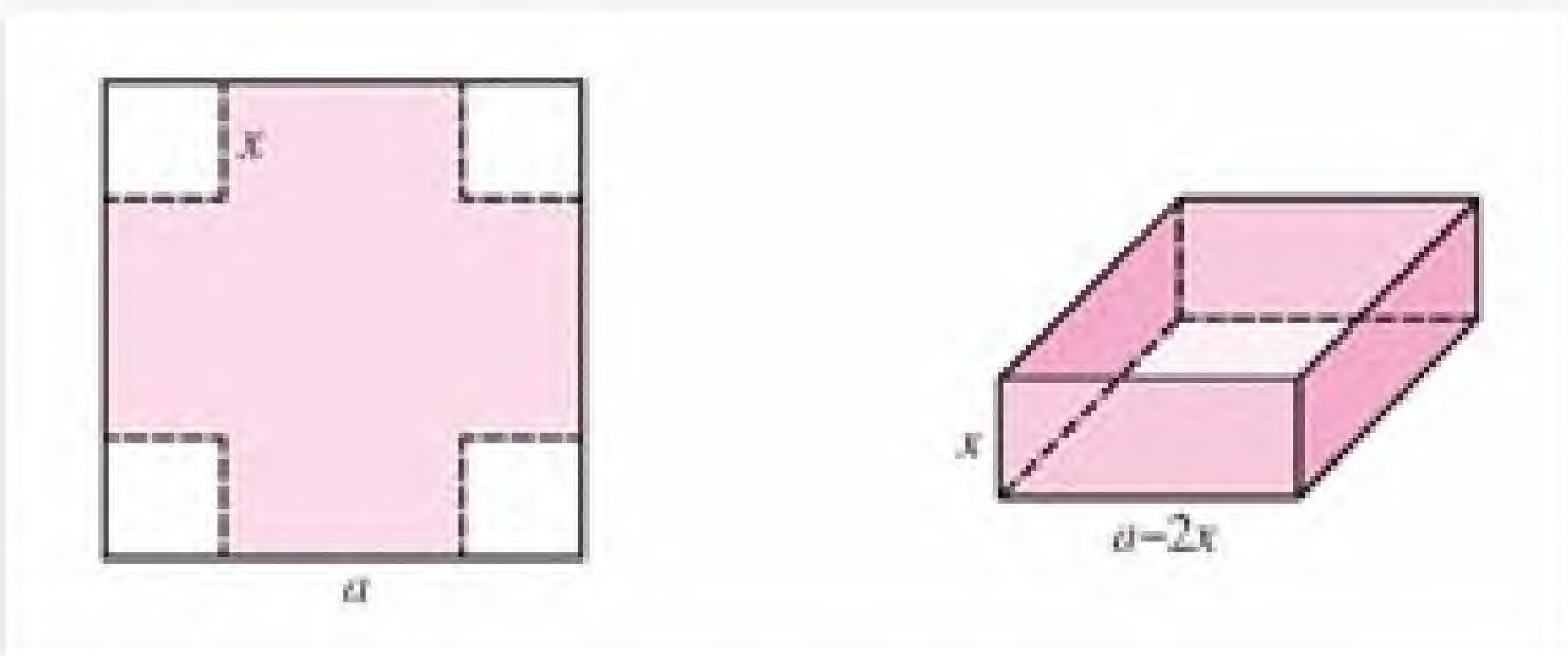


图 1-16

解：设截下的小正方形边长为 x，容器容积为 $V(x)$，则做成的长方体形无盖容器底面边长为$a-2x$，高为 x，于是

$$V(x)=(a-2x)^2x,\ 0<x<\frac{a}{2}.$$

即

$$V(x)=4x^3-4ax^2+a^2x,\ 0<x<\frac{a}{2}.$$

实际问题归结为求 $V(x)$在区间$\left(0,\ \frac{a}{2}\right)$上的最大值点. 为此，先求 $V(x)$的极值点. 在开区间$\left(0,\ \frac{a}{2}\right)$内，

$$V'(x)=12x^2-8ax+a^2.$$

令 $V'(x)=0$，即令 $12x^2-8ax+a^2=0$.

解得 $x_1=\frac{1}{6}a$，$x_2=\frac{1}{2}a$（舍去）.

$x_1=\frac{1}{6}a$ 在区间$\left(0,\ \frac{a}{2}\right)$内，$x_1$ 可能是极值点. 且当 $0<x<x_1$ 时，$V'(x)>0$；当 $x_1<x<\frac{a}{2}$时，$V'(x)<0$.

因此 x_1 是极大值点，且在区间$\left(0,\ \frac{a}{2}\right)$内，$x_1$ 是唯一的极值点，所以 $x=x_1=\frac{1}{6}a$ 是 $V(x)$的最大值点.

即当截下的正方形边长为$\frac{1}{6}a$ 时，容积最大.

例 2 横截面为矩形的横梁的强度同它的断面高的平方与宽的积成正比. 要将直径为 d 的圆木锯成强度最大的横梁，断面的宽度和高度应是多少?

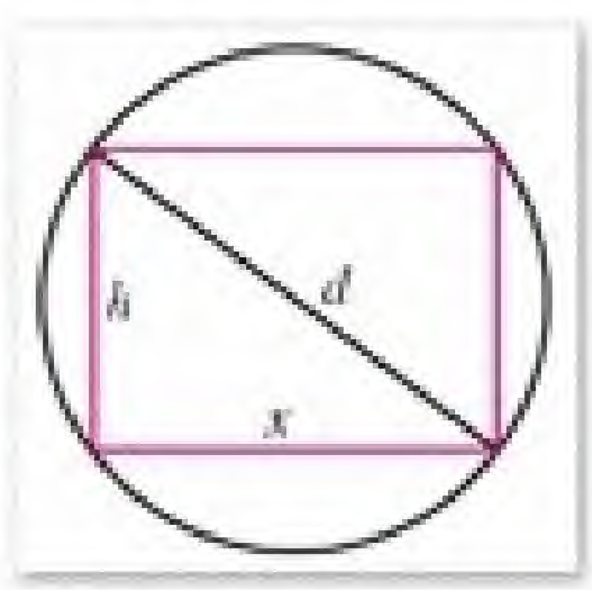


图 1-17

解：如图 1-17 所示，设断面宽为 x，高为 h，则

$$h^2=d^2-x^2.$$

横梁的强度函数

$$f(x)=kxh^2 \text{（}k\text{ 为强度系数，}k>0\text{）},$$

所以

$$f(x)=kx(d^2-x^2)\ \ 0<x<d.$$

在开区间$(0, d)$内，令

$$f'(x)=k(d^2-3x^2)=0.$$

解方程 $d^2-3x^2=0$，得两个根 $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}d$，其中负根没有意义，舍去．当 $0<x<\frac{\sqrt{3}}{3}d$ 时，$f'(x)>0$；当$\frac{\sqrt{3}}{3}d<x<d$ 时，$f'(x)<0$．因此，在区间$(0, d)$内只有一个极大值点

$$x=\frac{\sqrt{3}}{3}d.$$

所以 $f(x)$在 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}d$ 取最大值，就是横梁强度的最大值．这时

$$h=\sqrt{d^2-x^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}d.$$

即当宽为$\frac{\sqrt{3}}{3}d$，高为$\frac{\sqrt{6}}{3}d$ 时，横梁的强度最大．

例 3 如图 1-18 所示，一海岛驻扎一支部队，海岛离岸边最近点 B 的距离是 150 km．在岸边距点 B 300 km 的点 A 处有一军需品仓库．有一批军需品要尽快送达海岛．A 与 B 之间有一铁路，现用海陆联运方式运送．火车时速为 50 km，船时速为30 km，试在岸边选一点 C，先将军需品用火车送到点 C，再用轮船从点 C 运到海岛．问点 C 选在何处可使运输时间最短？

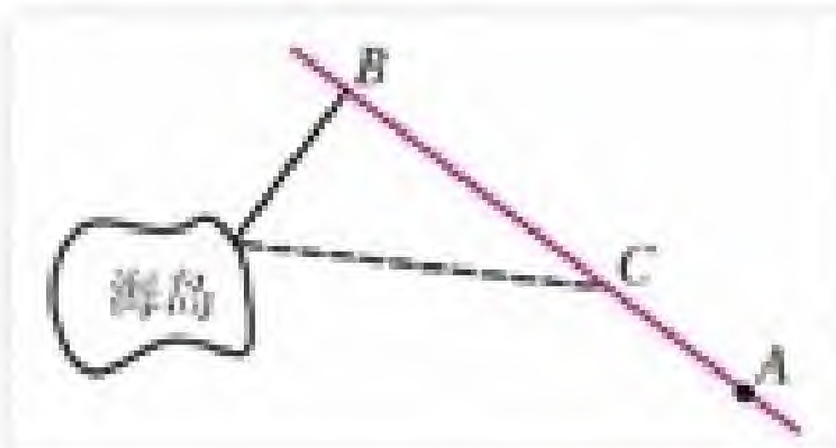


图 1-18

解：设点 C 与点 B 的距离为 x km，则运输时间

$$T(x)=\frac{\sqrt{150^2+x^2}}{30}+\frac{300-x}{50},\ 0\leqslant x\leqslant 300.$$

因为 $(\sqrt{150^2+x^2})'=\frac{x}{\sqrt{150^2+x^2}}$❶，

所以 $T'(x)=\frac{x}{30\sqrt{150^2+x^2}}-\frac{1}{50}$．

令 $T'(x)=0$，则有

$$5x-3\sqrt{150^2+x^2}=0,$$
$$5x=3\sqrt{150^2+x^2},$$
$$25x^2=9(150^2+x^2).$$

解此方程，得

$$x=\pm\frac{\sqrt{9\times150^2}}{4}=\pm\frac{3\times150}{4}=\pm112.5.$$

注

❶ 由复合函数的求导法则，令 $150^2+x^2=u$，则

$$(\sqrt{150^2+x^2})'=(\sqrt{u})'\cdot u'$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot(150^2+x^2)'$$
$$=\frac{2x}{2\sqrt{150^2+x^2}}=\frac{x}{\sqrt{150^2+x^2}}.$$

舍去负值，取 $x=x_0=112.5$.

因为 $T(0)=\dfrac{150}{30}+\dfrac{300}{50}=11$，$T(300)\approx 11.2$，

$T(112.5)=\dfrac{\sqrt{150^2+112.5^2}}{30}+\dfrac{187.5}{50}=10$，

而 10 是 11，11.2 和 10 中的最小者，所以 $x=x_0=112.5$ 是最小值点.

所以点 C 选在与点 B 的距离为 112.5 km 处，运输时间最省.

例 4 如图 1-19 所示，已知电源的电动势为 ε，内电阻为 r，问当外电阻 R 取什么值时，输出的功率最大.

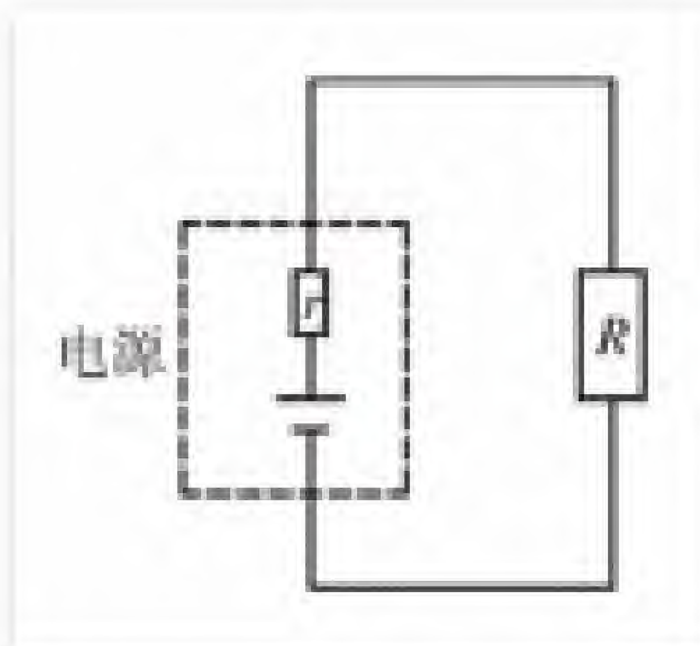


图 1-19

解：由欧姆定律得电流强度

$$I=\frac{\varepsilon}{R+r}.$$

在负载电路上的输出功率

$$P=P(R)=I^2R=\frac{\varepsilon^2 R}{(R+r)^2}.$$

实验表明，当 ε，r 一定时，输出功率由负载电阻 R 的大小决定. R 很小时，电源功率大都消耗在内电阻 r 上，输出功率可以变得很小；R 很大时，电路中电流很小，输出功率也会变得很小，因此 R 一定有一个适当的数值，使输出的功率最大. 令

$$P'(R)=\left[\frac{\varepsilon^2 R}{(R+r)^2}\right]'=\varepsilon^2\frac{(R+r)^2-2R(R+r)}{(R+r)^4}$$

$$=\varepsilon^2\frac{r-R}{(R+r)^3}=0,$$

即
$$\varepsilon^2(R-r)=0,$$
解方程得
$$R=r.$$

因此，当 $R=r$ 时，输出的功率最大.

即当外电路负载电阻等于内电阻时，输出功率最大.

从以上例题可以看出，求实际问题中的最大(小)值，先要建立实际问题的数学模型，写出实际问题中变量之间的函数关系 $y=f(x)$，然后再利用导数研究函数的最值.

练习A

1. 设两个正数之和为常数 c. 求这两个数之积的最大值. 并由此证明不等式

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}\ (a,\ b>0).$$

2. 用长度为 l 的铁丝围成长方形，求围成长方形的最大面积.
3. 把长度为 l 的铁丝分成两段，各围成一个正方形，问怎样分法，才能使它们的面积之和最小.

练习B

1. 等腰三角形的周长为 $2p$，它围绕底边旋转一周成一几何体，问三角形的各边长分别是多少时，几何体的体积最大？
2. 做一个容积为 216 mL 的圆柱形封闭容器，高与底面直径为何值时，所用材料最省？
3. 一跳水运动员离开跳板后，所达到的高度与时间的函数关系是
$$h(t)=10-4.9t^2+8t,$$
求该运动员达到的最大高度（距离单位：m，时间单位：s）.
4. x_1，x_2，…，x_n 是一组已知数据，令 $s(x)=(x-x_1)^2+(x-x_2)^2+\cdots+(x-x_n)^2$，当 x 取何值时，$s(x)$取最小值？

习题1-3 A

1. 确定下列函数的单调区间：
(1) $y=2x-3$；　　(2) $y=x^2-8x+16$；
(3) $y=(x-1)^3$；　　(4) $y=x^2(x-1)$.
2. 证明函数 $y=2x+\sin x$ 在实数范围内是增函数.
3. 求下列二次函数的极值：
(1) $y=x^2-2x+3$；　　(2) $y=-x^2+2x+5$.
4. 求下列函数的极值：
(1) $y=x^3-x^2-x+4$；　　(2) $y=2x^2-x^4$；
(3) $y=-x^3+3x-5$；　　(4) $y=4x^3-3x^2-6x+2$.
5. 求下列函数在给定区间的最大值或最小值：
(1) $y=x^2-3x+2$，$[0, 3]$；　　(2) $y=x+2\sqrt{x}$，$[0, 4]$；
(3) $y=x^2-2x-1$，$[-2, 0]$；　　(4) $y=-2x^2+7x-3$，$[0, 2]$.
6. 用边长为 60 cm 的正方形的铁皮做一个无盖水箱，先在四角分别截去相同的小正方形，然后把四边翻转 90°再焊接而成一个长方体形水箱．问水箱底边应取多少，才能使水箱的容积最大？
7. 将长为 72 cm 的铁丝截成 12 段，搭成一个正四棱柱的模型，以此为骨架做成一个容积最大的容器，问铁丝应怎样截法？

习题 1-3 B

1. 求函数 $f(x)=x^3-4x^2+x-1$ 的极值点与最大值或最小值，以及单调区间，并画出函数草图.
2. 求函数 $y=2x^3-3x^2-12x+8$ 在区间$[-2, 3]$上的最大值和最小值.
3. 一个质点在直线上运动，其任一时刻 t 的位置是
$$f(t)=3t-t^2.$$
求此质点的最大位移和最大速度（距离单位：cm，时间单位：s）.
4. 在等腰梯形 $ABCD$ 中，设上底 $CD=40$，腰 $AD=40$，问 AB 多长时，等腰梯形的面积最大？
（提示：设$\angle A=\theta$.）
5. 一正方形内接于另一固定的正方形（顶点分别在四边上），问内接正方形的一边与固定正方形一边的夹角取什么值时，内接正方形的面积最小？
6. 一火炮炮筒与地面成 60°角，炮弹射离炮膛时的速度为 240 m/s. 求炮弹所能达到的最大高度与最远水平距离.

1.4 定积分与微积分基本定理

1.4.1 曲边梯形面积与定积分

我们知道，任一多边形都可以分割成一些三角形，通过计算这些三角形面积的和就可以得出这个多边形的面积. 是否可以使用类似的方法计算由曲线围成的区域的面积呢？下面我们举例来研究这个问题.

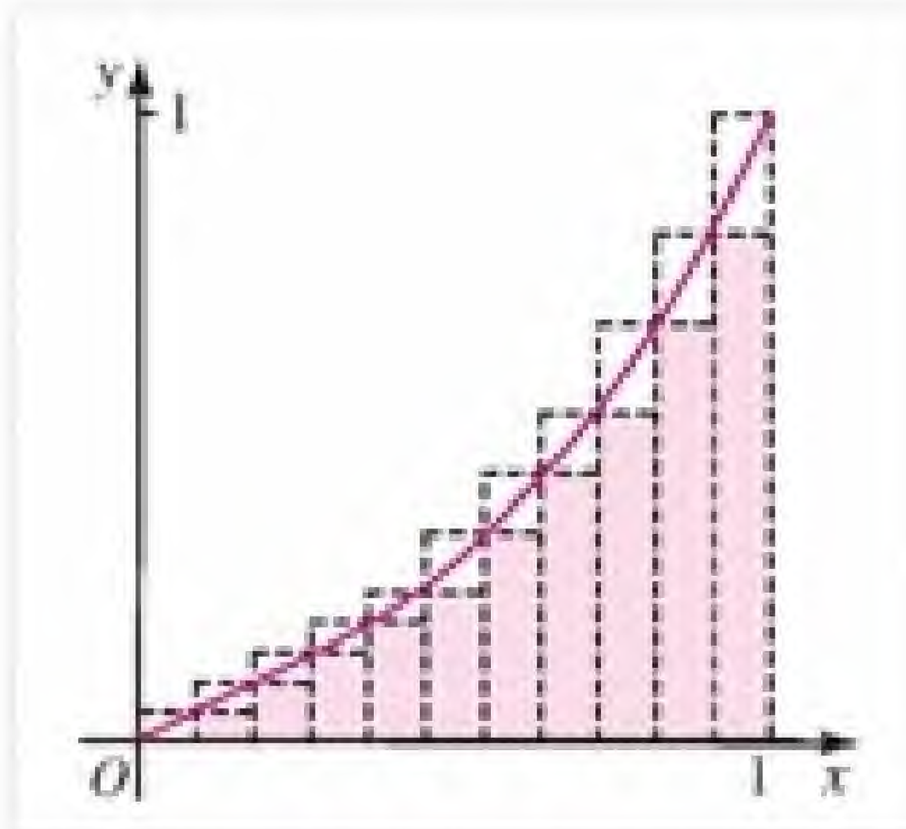


图 1-20

例 1 求曲线 $y=x^2$ 与直线 $x=1$，$y=0$ 所围成的区域的面积.

解：将区间[0，1]等分为 n 个小区间(图 1-20)：

$$\left[0,\ \frac{1}{n}\right],\ \left[\frac{1}{n},\ \frac{2}{n}\right],\ \cdots,\ \left[\frac{i-1}{n},\ \frac{i}{n}\right],\ \cdots,\ \left[\frac{n-1}{n},\ \frac{n}{n}\right],$$

每个小区间的长度为

$$\Delta x=\frac{i}{n}-\frac{i-1}{n}=\frac{1}{n}.$$

过各分点作 x 轴的垂线，把曲边梯形❶分成 n 个小曲边梯形，再分别用小区间左端点的纵坐标 $\left(\frac{i-1}{n}\right)^2$ 为高，$\Delta x=\frac{1}{n}$ 为底作小矩形，于是图中曲线之下小矩形面积依次为

$$0^2\cdot\frac{1}{n},\ \left(\frac{1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n},\ \left(\frac{2}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n},\ \cdots,\ \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}.$$

所有这些小矩形的面积和（图中阴影部分的面积）

$$\begin{aligned}S_n&=0^2\cdot\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}+\left(\frac{2}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}\\&=\frac{1}{n^3}[0^2+1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2]\\&=\frac{1}{n^3}\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\\&=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

由此得到

$$S=\lim_{\Delta x\to 0}S_n=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}.$$

从图形上看，当 n 越来越大时，划分越来越细，阴影部分的面积与曲边梯形面积相差越来越小. 当 $n\to+\infty$ 时，阴影部分趋近于曲边三角形，因此，可以将 $\frac{1}{3}$ 视为此曲边三角形的面积.

注

❶ 曲线与平行于 y 轴的直线和 x 轴所围成的图形，通常称为**曲边梯形**. 图 1-20 是一个特殊的曲边梯形，它是一个曲边三角形.

思考与讨论

在例 1 求曲边三角形面积的过程中，如果取小矩形的高为小区间右端点的纵坐标，所有这些小矩形的面积和记为 A_n，则 $A_n>$ 曲边三角形的面积 S. 当 n 越来越大时，划分越来越细，A_n 与曲边三角形面积 S 相差是否越来越小？当 $n\to+\infty$ 时，A_n 是否趋向于曲边三角形的面积 S？

例 2 弹簧在拉伸过程中，力与伸长量成正比，即力 $F(x)=kx$（k 是常数，x 是伸长量）. 求弹簧从平衡位置拉长 b 所做的功.

解：将物体用常力 F 沿着力的方向移动距离 x，则所做的功 $W=Fx$. 本题 F 是克服弹簧拉力的变力，是移动距离 x 的函数，

$$F(x)=kx.$$

将 $[0,\ b]$ n 等分，记 $\Delta x=\dfrac{b}{n}$，分点依次为

$$x_0=0,\ x_1=\frac{b}{n},\ x_2=\frac{2b}{n},\ \cdots,\ x_{n-1}=\frac{(n-1)b}{n},\ x_n=b.$$

当 n 很大时，在分段 $[x_i,\ x_{i+1}]$ 所用的力约为 kx_i，所做的功

$$\Delta W_i\approx kx_i\cdot\Delta x=kx_i\frac{b}{n}.$$

则从 0 到 b 所做的总功 W 近似地等于

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1}\Delta W_i &= \sum_{i=0}^{n-1}kx_i\cdot\Delta x=\sum_{i=0}^{n-1}k\cdot\frac{ib}{n}\cdot\frac{b}{n}\\ &=\frac{kb^2}{n^2}[0+1+2+\cdots+(n-1)]\\ &=\frac{kb^2}{n^2}\,\frac{n(n-1)}{2}=\frac{kb^2}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

当 $n\to+\infty$ 时，上式右端趋近于 $\dfrac{kb^2}{2}$.

于是得到弹簧从平衡位置拉长 b 所做的功为

$$W=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\Delta W_i=\frac{kb^2}{2}.$$

以上两个实际问题，一个是求曲边三角形的面积，一个是求变力所做的功，虽然实际意义不同，但是解决问题的方法和步骤是完全相同的，都归结为求一个函数在某一闭区间上的和式的极限问题：

曲边三角形或曲边梯形的面积 $S=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=0}^{n-1}f(x_i)\Delta x$；

克服弹簧拉力的变力所做的功 $W=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=0}^{n-1}f(x_i)\Delta x$.

类似的问题还很多，它们都可以归结为求这种和式的极限．牛顿等数学家经过苦心研究，得到了解决这类问题的一般方法：求函数的定积分．

下面给出一般函数定积分的定义．

设函数 $y=f(x)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上（图 1-21）．用分点

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$

把区间 $[a, b]$ 分为 n 个小区间，其长度依次为

$$\Delta x_i=x_{i+1}-x_i,\ i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1.$$

记 λ 为这些小区间长度的最大者，当 λ 趋近于 0 时，所有的小区间长度都趋近于 0．在每个小区间内任取一点 ξ_i，作和式

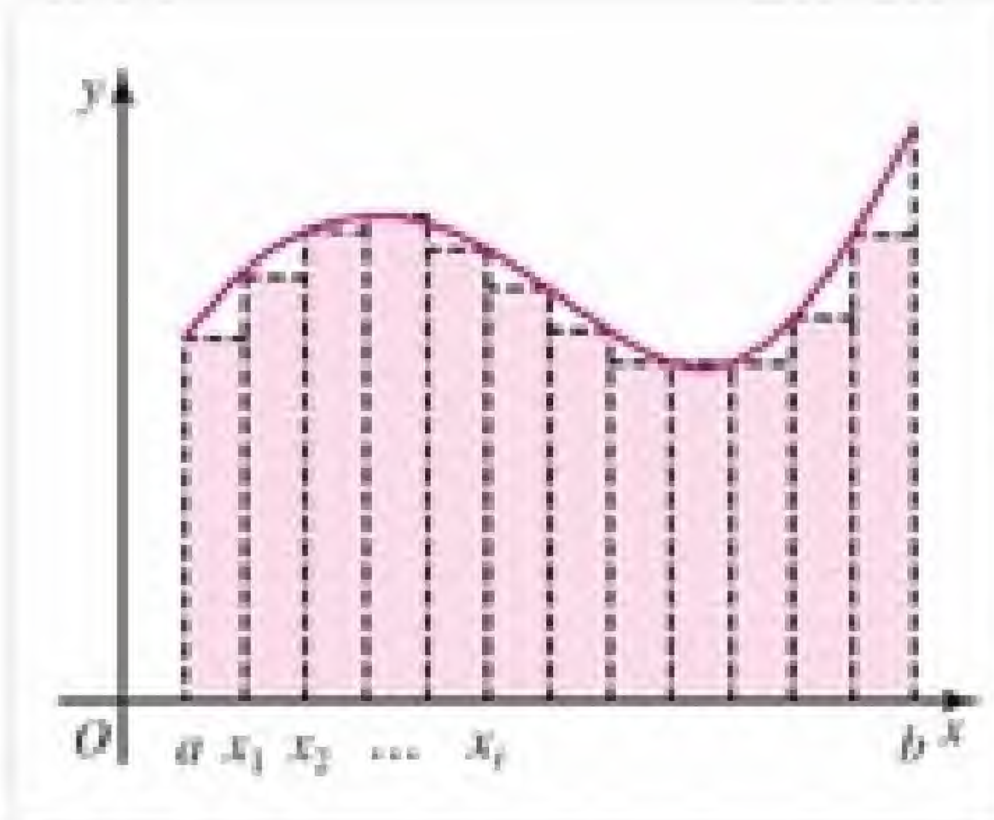


图 1-21

$$I_n=\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

当 $\lambda\to 0$ 时，如果和式的极限存在，我们把和式 I_n 的极限叫做函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的**定积分**，记作

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

其中 $f(x)$ 叫做**被积函数**，a 叫**积分下限**，b 叫**积分上限**．$f(x)\mathrm{d}x$ 叫做**被积式**．此时称函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积．

根据定积分的定义，曲边梯形的面积 S 等于其曲边所对应的函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的定积分，即

$$S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

于是，例 1 的结果可以写为

$$S=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}.$$

例 2 中将弹簧从平衡位置拉长到 b 所做的功可以写为

$$W=\int_0^b kx\mathrm{d}x=\frac{kb^2}{2}.$$

如果函数 $y=f(x)$ 在 $[a, b]$ 的图象是一条连续的曲线，它与直线 $y=0$，$x=a$，$x=b$ 所围成的曲边梯形面积客观存在，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 一定是可积的．

探索与研究

1. 对例 1 的问题，我们把区间 $[0, 1]$ 等分为 n 个小区间，用小区间作底，小区间的

两个端点的纵坐标为高作出两组小矩形，这两组小矩形的面积和分别记作 S_n 和 A_n. 我们已从图形上看到，当 n 越来越大时，S_n 和 A_n 与曲边梯形的面积 S 越来越接近. 请同学们用计算器或计算程序计算，填入下表，再从数量上看看 S_n 和 A_n 的变化趋势.

n	S_n	A_n	与精确值$\left(\frac{1}{3}\right)$的差
1			
5			
10			
50			
100			

2. 你能根据定积分定义说明下列事实吗？

(1) $\int_a^b cf(x)\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$（$c$ 为常数）；

(2) 设 $f(x)$，$g(x)$ 可积，则 $\int_a^b[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

练习A

1. 求 $\int_a^b c\mathrm{d}x$，c 为常数. 当 $c=1$ 时，积分记为 $\int_a^b \mathrm{d}x$. 说明它的几何意义.

2. 把积分区间等分为 3 份、5 份，用小矩形的面积和求定积分 $\int_1^2 x^3\mathrm{d}x$ 的近似值.

3. 用定积分求由直线 $y=x$，$x=1$，$x=2$，$y=0$ 所围成梯形的面积.

4. 将由曲线 $y=\sin x$ $\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 和直线 $x=\frac{\pi}{2}$，$y=0$ 所围成图形的面积写成定积分的形式.

练习B

1. 求抛物线 $y=x^2$ 与直线 $y=4$ 所围成的图形的面积.

2. 求由曲线 $y=x^3$ 与直线 $y=0$，$x=1$ 所围成的曲边形的面积.

3. 求 $\int_a^b kx\mathrm{d}x$，并将结果写成梯形面积公式.

计算机上的练习

1. 对练习 A 第 2 题，把积分区间等分为 100、150、200 份，求定积分的近似值.

2. 计算下列定积分：

(1) $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$； (2) $\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

1.4.2 微积分基本定理

如果总是用定义来求定积分，那将非常麻烦，有时甚至无法计算. 而求导数比求定积分容易得多. 17 世纪，牛顿和莱布尼茨找到了两者之间的关系.

我们还是从爬山说起.

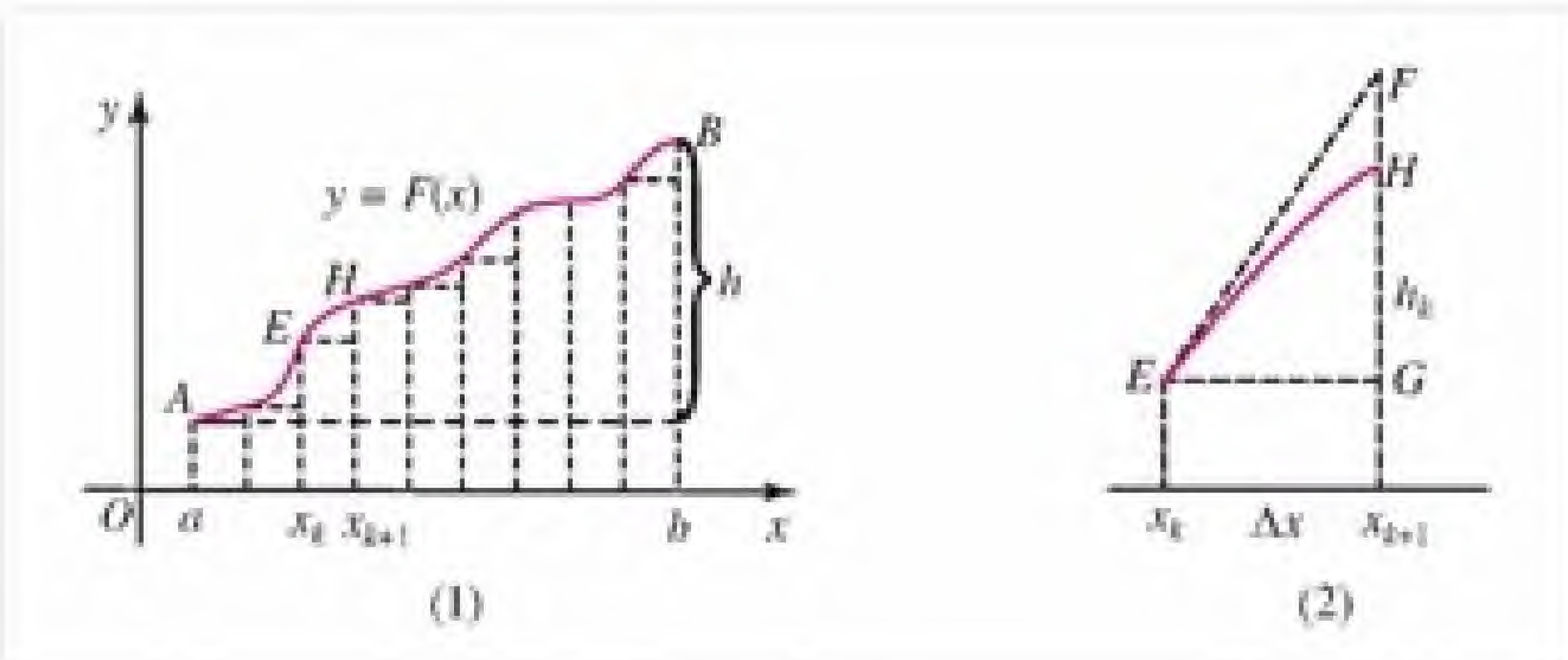


图 1-22

如图 1-22(1)，把地平线取作横坐标轴，$y=F(x)$是爬山路线，并假定曲线$y=F(x)$与 x 轴都在同一平面内. A 是出发点，点 B 为山顶.

在爬山路线上每一点$(x, F(x))$，山坡的斜率为$F'(x)$.

将区间$[a, b]$ n 等分，记 $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$. 我们来分析每一小段所爬高度与这一小段所在直线的斜率的关系. 不妨以$[x_k, x_{k+1}]$为例（如图 1-22(2)）. EF 是曲线过点 E 的切线，其斜率为$F'(x_k)$，于是，$GF=F'(x_k)\Delta x$. 在此段所爬高度 h_k 为 GH，$GH=F(x_{k+1})-F(x_k)$. 当 Δx 很小时(即当 n 很大时)，

$$h_k=GH\approx GF,$$

即

$$F(x_{k+1})-F(x_k)\approx F'(x_k)\Delta x.$$

这样，我们得到了一系列近似等式：

$$h_1=F(a+\Delta x)-F(a)\approx F'(a)\Delta x,$$
$$h_2=F(a+2\Delta x)-F(a+\Delta x)\approx F'(a+\Delta x)\Delta x,$$
$$h_3=F(a+3\Delta x)-F(a+2\Delta x)\approx F'(a+2\Delta x)\Delta x,$$
$$\cdots\cdots$$
$$h_{n-1}=F[a+(n-1)\Delta x]-F[a+(n-2)\Delta x]$$
$$\approx F'[a+(n-2)\Delta x]\Delta x,$$
$$h_n=F(b)-F[a+(n-1)\Delta x]\approx F'[a+(n-1)\Delta x]\Delta x.$$

将上列 n 个近似等式相加，得到从 A 到 B 所爬总高度

$$h=h_1+h_2+\cdots+h_n=F(b)-F(a)\approx\sum_{i=0}^{n-1}F'(a+i\Delta x)\Delta x.$$

由定积分定义可知：当 $\Delta x\to 0$ 时，

$$\sum_{i=0}^{n-1}F'(a+i\Delta x)\Delta x\to\int_a^b F'(x)\mathrm{d}x.$$

由此可见

$$\int_a^b F'(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a).$$

这一公式告诉我们：

$F'(x)$ 从 a 到 b 的积分等于 $F(x)$ 在两端点的取值之差.

通过以上直观分析可得到如下定理：

微积分基本定理　如果

$$F'(x)=f(x),$$

且 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a).}$$

其中 $F(x)$ 叫做 $f(x)$ 的一个**原函数**. 由于 $[F(x)+c]'=f(x)$，$F(x)+c$ 也是 $f(x)$ 的原函数，其中 c 为常数.

一般地，原函数在 $[a,b]$ 上的改变量 $F(b)-F(a)$ 简记作

$$F(x)\Big|_a^b$$

因此，微积分基本定理可以写成形式：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a).$$

探索与研究

我们知道，如果路程 $s=s(t)$，则时刻 t 的速度 $v(t)=s'(t)$. 从导数和积分的定义，论证微积分基本定理成立：

$$\int_a^b s'(t)\mathrm{d}t = s(b)-s(a).$$

例 1　求 $y=\sin x$ 在 $[0, \pi]$ 上阴影部分的面积 S（图 1-23）.

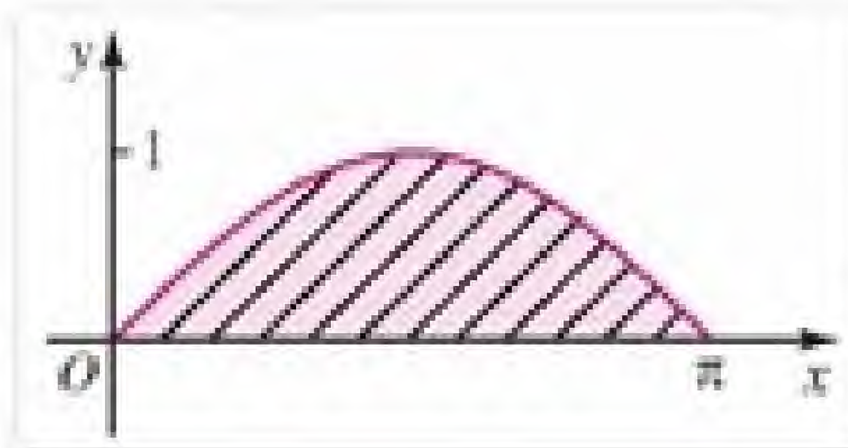


图 1-23

解：$S=\int_0^\pi \sin x\mathrm{d}x$.

因为　$(-\cos x)'=\sin x$，

所以　$-\cos x$ 是 $\sin x$ 的一个原函数，

因此　$\int_0^\pi \sin x\mathrm{d}x = (-\cos \pi)-(-\cos 0)$

$= 1+1=2$.

例 2　求曲线 $y=\sin x$ 与 x 轴在区间 $[0, 2\pi]$ 上所围成阴影部分的面积 S（图 1-24）.

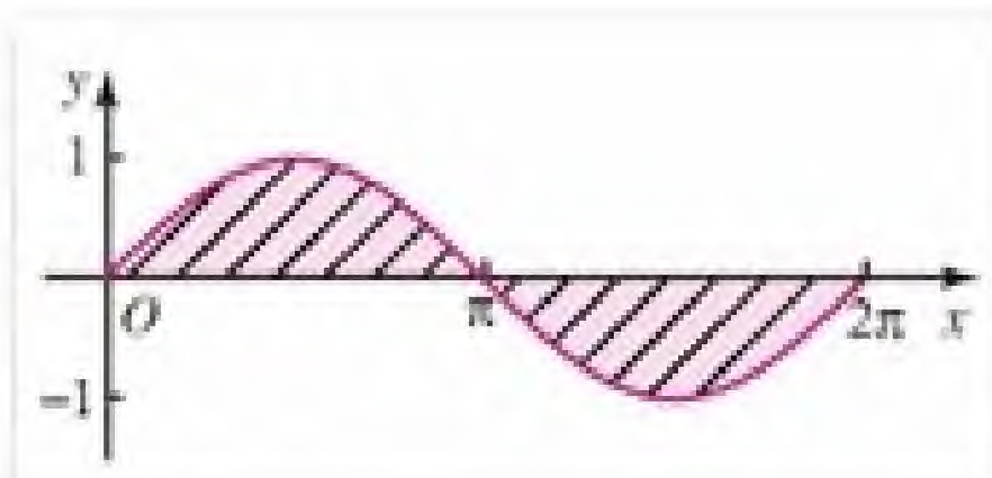


图 1-24

分析：由例 1 知

$$\int_0^\pi \sin x\mathrm{d}x = 2;$$

又可以求得　$\int_\pi^{2\pi} \sin x\mathrm{d}x = -2$.

正弦函数在区间 $[\pi, 2\pi]$ 上的积分为负值，因此正弦函数在 $[0, 2\pi]$ 上的定积分等于 0，但是它不等于我们所求的阴影部分的面积.

解：$S=\int_0^\pi \sin x\mathrm{d}x + \left|\int_\pi^{2\pi} \sin x\mathrm{d}x\right| = 2+2=4$.

例 3　计算：(1) $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_0^2 (x^2+1)\mathrm{d}x$.

解：(1) 因为　$(2\sqrt{x})'=\frac{1}{\sqrt{x}}$，

所以　$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\sqrt{4}-2\sqrt{1}=2.$$

(2) 因为　$\left(\frac{x^3}{3}+x\right)'=x^2+1$，

所以　$$\int_0^2 (x^2+1)\mathrm{d}x = \left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Big|_0^2 = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}.$$

从以上探求定积分计算方法的过程中，我们知道，求定积分主要是要找到被积函数的原函数. 也就是说，要找到一个函数，它的导函数等于被积函数. 由此可见，求导运算与

求原函数运算互为逆运算.

练习A

1. 计算定积分：

(1) $\int_0^3 2x\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_1^3 x^2\mathrm{d}x$；

(3) $\int_0^2 (x+x^2)\mathrm{d}x$；　　(4) $\int_0^\pi \cos x\mathrm{d}x$.

2. 求由曲线 $y=\sqrt{x}$ 与直线 $x=4$，$y=0$ 所围成的曲边梯形的面积.

3. 求曲线 $y=x^2$ 与直线 $y=2x$ 所围图形的面积.

练习B

1. 求由曲线 $y=\cos x$ $\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 与直线 $x=0$，$y=0$ 所围成的图形的面积.

2. 计算：

(1) $\int_0^1 \sqrt{x}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_a^b x^k\mathrm{d}x$ (k 为正整数).

3. 求曲线 $y=x^3$ 与直线 $y=x$ 在第一象限所围成的图形的面积.

4. 计算 $\int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 与 $\int_1^2 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$.

5. 运用微积分基本定理说明：

(1) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$；

(2) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ $(a<c<b)$.

习题1-4 A

1. 求由下列给出的边界围成的区域面积：

(1) $y=x^3$，$x=1$，$x=5$，$y=0$；　　(2) $y=x$，$x=2$，$x=5$，$y=0$；

(3) $y=x^4$，$x=-1$，$x=1$，$y=0$；　　(4) $y=\frac{1}{x}$，$x=0.5$，$x=2$，$y=0$.

2. 计算下列定积分：

(1) $\int_{0}^{3} x^{4}\,\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_{-1}^{3} 2x^{5}\,\mathrm{d}x$；

(3) $\int_{0}^{3} (x^{3}+x)\,\mathrm{d}x$；　　(4) $\int_{-1}^{3} 4x^{3}\,\mathrm{d}x$.

3. 求由下列给出的边界围成的区域面积：

(1) $y=4-x^{2}$，$y=0$；　　(2) $y=x^{2}$，$y=3x$.

习题 1-4 B

1. 求由下列给出的边界所围成的区域的面积：

(1) $y=\sin x\left(\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant \pi\right)$，$x=\frac{\pi}{4}$，$y=0$；

(2) $y=x^{2}$，$y=2x^{2}$，$x=1$；

(3) $y=x^{2}$，$y=\sqrt{x}$.

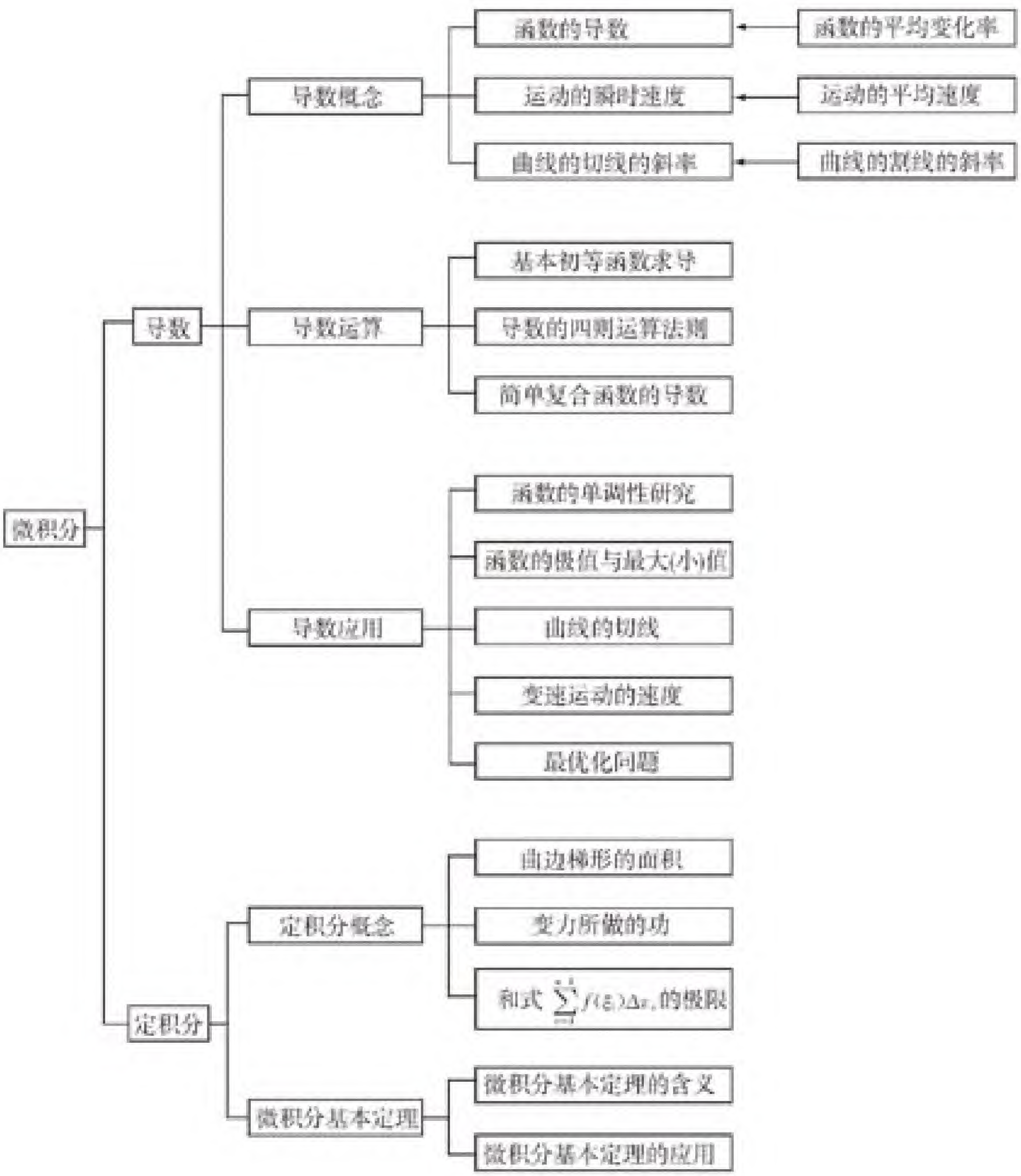
2. 计算下列函数的定积分：

(1) $\int_{0}^{\pi} \cos x\,\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x$；

(3) $\int_{0}^{2} (x^{2}-2x)\,\mathrm{d}x$；　　(4) $\int_{1}^{2} (x+x^{-1})\,\mathrm{d}x$.

本章小结

Ⅰ 知识结构


微积分
导数
导数概念
函数的导数
函数的平均变化率
运动的瞬时速度
运动的平均速度
曲线的切线的斜率
曲线的割线的斜率
导数运算
基本初等函数求导
导数的四则运算法则
简单复合函数的导数
导数应用
函数的单调性研究
函数的极值与最大(小)值
曲线的切线
变速运动的速度
最优化问题
定积分
定积分概念
曲边梯形的面积
变力所做的功
和式 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 的极限
微积分基本定理
微积分基本定理的含义
微积分基本定理的应用

II 思考与交流

1. 在导数定义中，当 $\Delta x \to 0$ 时，$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to f'(x_0)$．$\Delta x$ 是否可以取零值？Δy 是否趋于 0？
2. 一次函数的平均变化率与瞬时变化率相同吗？其瞬时变化率的几何意义是什么？
3. 曲线的割线的斜率与切线的斜率有什么关系？
4. 变速运动在某一时刻的瞬时速度的含义是什么？
5. 公式 $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ 成立的条件是什么？
6. 设函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，如果对 x_0 附近的 x，都有 $f(x) \leqslant f(x_0)$，那么 $f'(x_0)$ 一定为 0 吗？
7. 如果 $f(x)$ 在 (a, b) 可导，导数等于 0 的点一定是极值点吗？
8. 判断一个点是可导函数的极值点的充分条件是什么？
9. 求可导函数在闭区间的最大(小)值，只需比较在导数为 0 的点和区间端点函数的值，其中最大(小)者为最大(小)值，这个说法正确吗？
10. 如果函数在闭区间的图象是一条连续不断的曲线（包括折线），第 9 题中的说法正确吗？
11. 一个函数的原函数有多少个？它们之间有什么关系？
12. 在定积分的定义中，Δx_i（$i=1, 2, \cdots, n$）的长度不一定相等，$f(\xi_i)$ 中的 ξ_i 是第 i 个区间中任一点．我们在求曲边梯形面积时，Δx_i 都相等，ξ_i 是子区间端点，为什么可以这样做？
13. 微积分基本定理有什么重要作用？

III 巩固与提高

1. 一质点沿一纵坐标轴运动(轴垂直向上方向为正向)，在时刻 t(s)时，质点的位置 $s=6t-t^2$(m)．

   (1) 求 $t=0, 2, 3, 6, 7$ 时质点的位置．当 s 值取负值时意味着什么？

   (2) 求瞬时速度 v (m/s)在时刻 t 的表示式；

   (3) 什么时刻开始改变运动的方向？
2. 在飞轮制动后 t (s)钟内飞轮转过的角度(弧度)由函数
$$\varphi(t)=4t-0.3t^2$$
给出，求：

   (1) $t=2$ (s)时，飞轮转过的角度；

   (2) 飞轮停止转动的时刻．
3. 求下列函数的导数：

(1) $y=(10x+3)^{100}$；　　(2) $y=(4x-3)(2x+5)$；

(3) $y=x^{0.1}$；　　(4) $y=\ln(6x-4)$；

(5) $y=\dfrac{x^4}{x^2+1}$；　　(6) $y=\cos(3x-\pi)$.

4. 求下列函数在给定点的导数：

(1) $f(x)=x^{\frac{1}{4}}$，$x=5$；　　(2) $f(x)=3(x+1)x^2$，$x=1$；

(3) $f(x)=2x^2+5x-1$，$x=2$；　　(4) $f(x)=(x^2+1)(2x+3)$，$x=2$；

(5) $f(x)=\dfrac{3}{x+3}$，$x=0$；　　(6) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+1}$，$x=1$.

5. 求下列函数在给定点的切线方程：

(1) $y=9x^2-1$，$\left(\dfrac{1}{3},\ 0\right)$；　　(2) $y=\ln x$，$(1,\ 0)$；

(3) $y=(x-3)^3$，$(0,\ -27)$；　　(4) $y=\dfrac{3x}{x+1}$，$(2,\ 2)$.

6. 求下列函数的单调区间：

(1) $y=2+x-x^2$；　　(2) $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$；

(3) $y=\sin 2x$，$x\in[0,\ \pi]$；　　(4) $y=\sin x+\cos x$.

7. 求下列函数的极值点和单调区间：

(1) $y=x^3-x+8$；　　(2) $y=\dfrac{2}{1+x^2}$.

8. 求函数 $y=2x^3-15x^2+36x-27$ 的极值点和单调区间，并画出这个函数的草图.

9. 在半径为 0.5 m 圆桌中心的上方安装一吊灯，桌面上灯光的强度是

$$y=k\,\frac{\sin\varphi}{r^2},$$

其中 r 是灯与桌面上被照点的距离，φ 是光线与桌面的夹角. 为使桌边最亮，吊灯应离桌面多高？

10. 已知 $y=\dfrac{1}{x}$，把区间[1，2]分成 10 等分、15 等分，以每一份作底边，左端点的函数值作高作矩形，试计算这 10 个小矩形、15 个小矩形的面积和，并把它与该曲线与直线 $x=1$，$y=0$ 和 $x=2$ 所围成的曲边梯形的精确面积作比较.

11. 计算下列定积分：

(1) $\int_0^2 x^9\,\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_{-a}^{a} x^3\,\mathrm{d}x$；

(3) $\int_{-a}^{a} x^4\,\mathrm{d}x$；　　(4) $\int_1^3 (x^2-x+3)\,\mathrm{d}x$.

12. 求下列曲线和直线所围成的图形的面积：

(1) $y=x^2$，　$y=x$；　　(2) $y=2x^2$，　$y=4$.

Ⅳ 自测与评估

1. 选择题：

(1) 在导数定义"当 $\Delta x \to 0$ 时，$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to f'(x_0)$"中，$\Delta x$（　　）.

(A) 恒取正值　　(B) 恒取正值或恒取负值

(C) 有时可取 0　　(D) 可取正值和负数，但不能取 0

(2) 可导函数在闭区间的最大值必在（　　）取得.

(A) 极值点　　(B) 导数为 0 的点

(C) 极值点或区间端点　　(D) 区间端点

(3) 设曲线在某点的切线斜率为 0，则此切线（　　）.

(A) 垂直于 x 轴　　(B) 垂直于 y 轴

(C) 既不平行也不垂直于 x 轴　　(D) 方向不能确定

(4) 设曲线在某点的切线斜率为负数，则此切线的倾斜角（　　）.

(A) 小于 $90°$　　(B) 大于 $90°$　　(C) 不超过 $90°$　　(D) 大于等于 $90°$

(5) $f(x)=x(1-x)^2$ 有（　　）个极值点.

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

(6) 设 $f(x)=x^3$，$f(a-bx)$的导数等于（　　）.

(A) $3(a-bx)$　　(B) $2-3b(a-bx)^2$　　(C) $3b(a-bx)^2$　　(D) $-3b(a-bx)^2$

(7) $\int_2^3 \frac{1}{x}\mathrm{d}x=$（　　）.

(A) $\frac{1}{3}-\frac{1}{2}$　　(B) $\ln 3-\ln 2$　　(C) $\ln 2-\ln 3$　　(D) $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$

(8) $\int_0^{2\pi} \cos x\mathrm{d}x=$（　　）.

(A) 0　　(B) 2　　(C) -2　　(D) 4

2. 设 $f(x)=(2-x)(x+2)^2$：

(1) 求 $f(x)$的极大值点与极小值点；

(2) 求 $f(x)$的单调区间；

(3) 求 $f(x)$在$[-5, 1]$的最大值与最小值；

(4) 画 $y=f(x)$的草图.

3. 已知 $f(x)=x^3$，求：

(1) $[f(3+2x)]'_x$；　　(2) $[f(3-2x)]'_x$.

4. 竖直向上抛出一个垒球，初速度为 $v_0=49$ m/s. 求垒球上升的最大高度.

5. 以 $60°$倾角和初速度 19.6 m/s 掷出一铅球. 问最多能将铅球掷多远？

6. 求三次曲线 $y=(2x+1)^3$ 与直线 $x=1$，$x=2$，$y=0$ 所围成的区域的面积.

7. 求由曲线 $y=x^2$ 与 $y=-x^2+2$ 所围成的图形的面积.

数 学 文 化

阅读与欣赏

微积分与极限思想

微积分思想雏形出现得很早，公元前两百多年，希腊科学泰斗阿基米德就用圆的内接正多边形无限逼近圆周，求得圆周率 π 的近似值．阿基米德还用原始的积分观念得到球体积公式 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$．他是用球体“薄片”的叠加，并运用杠杆原理得到球的“薄片”相当于球的外切圆柱挖去一个正圆锥相应的“薄片”，从而得出了球体积公式（图1-25）．

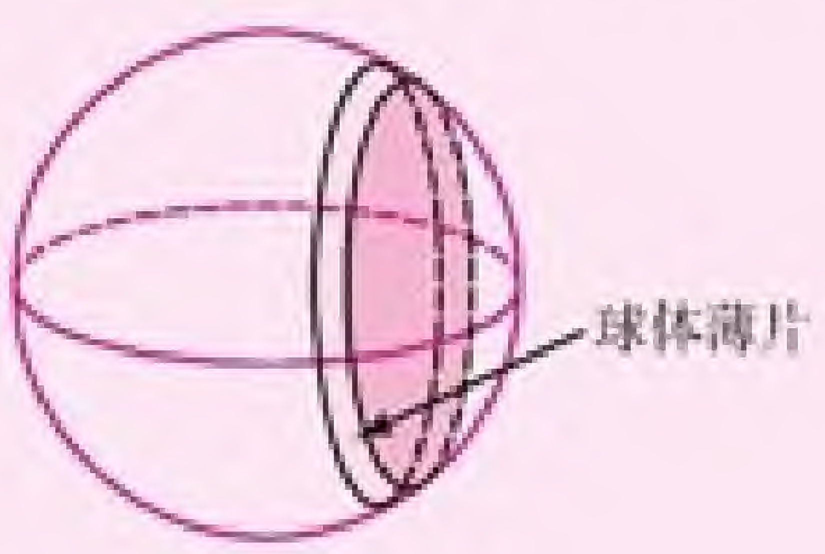


图 1-25

这是积分的雏形．公元 5 世纪，中国数学家祖冲之、祖暅父子，得出了

“缘幂势既同，则积不容异”

的原理，现在我们称它为**祖暅原理**．祖暅原理是说：

如果两物体在等高处的截面积都相等，则两者体积相同．

或者

如果两个平面的封闭图形在等高处截线段都相等，则两者面积相等（图 1-26）．

图 1-26

这也是一种朴素的积分思想．

微积分思想中的微分思想产生比较晚．公元 16 世纪，伽利略发现了自由落体运动的规律：

$$s=\frac{1}{2}gt^2.$$

这个变速运动的瞬时速度是 s 对 t 的平均变化率

$$\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}=\frac{1}{2}g\,\frac{(t_0+\Delta t)^2-t_0^2}{\Delta t}$$
$$=gt_0+\frac{1}{2}g\Delta t.$$

当 $\Delta t\to 0$ 时，平均变化率趋向常数 gt_0．这是导数概念的启蒙．

10 世纪初，笛卡儿建立了坐标系，使几何图形能够用函数表示．函数也可以用几何图形直观地表示．人们在探求曲线 $y=f(x)$ 的切线的时候，发现切线可由割线逼近而来．当 $\Delta x\to 0$ 时，割线的斜率

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

所趋近的常数就是切线的斜率．

求变速运动的瞬时速度和求曲线切线的斜率是产生导数概念的直接动因．

下面，我们应用祖暅原理求球体的体积公式．

例 求球体积公式．

分析：设球体的半径为 r．求解分两步：第一步由刘徽完成．他创造了一个新立体图形，称为“牟合方盖”，并得到了球与“牟合

方盖”的体积比为$\frac{\pi}{4}$．如图 1-27，在一个立方体内作两个互相垂直的内切圆柱，这两个圆柱体相交的部分，就是“牟合方盖”．“牟合方盖”恰好把立方体的内切球包含在内并且同它相切．第二步由祖暅完成．他求出了“牟合方盖”的体积，也就求出了相应球的体积．

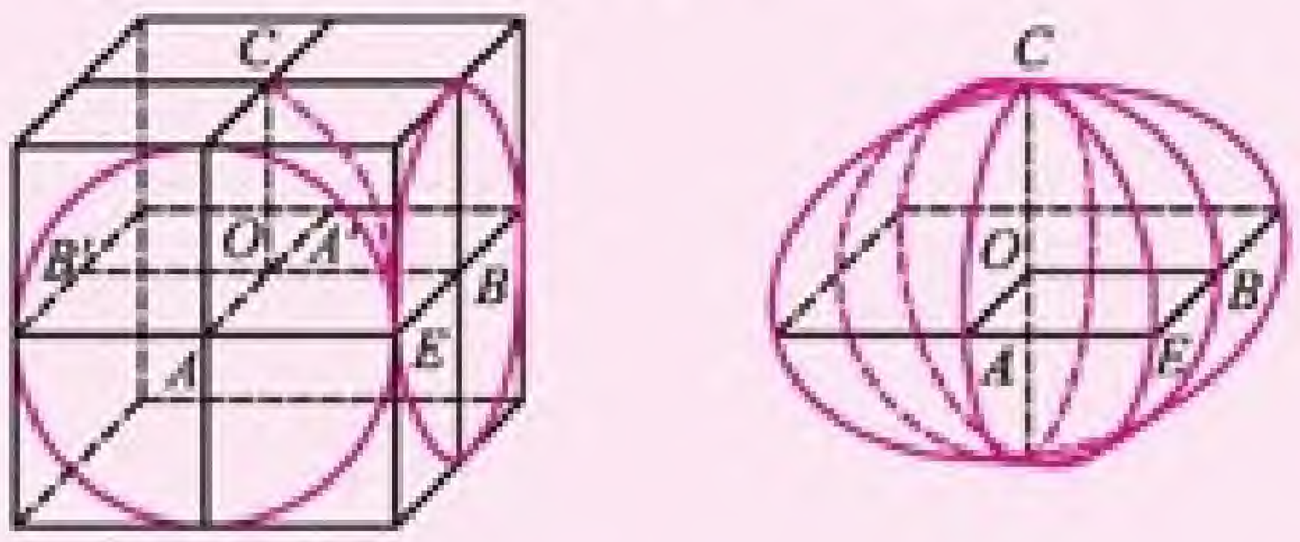


图 1-27

解：用一个水平截面去截“牟合方盖”及内切球，就得到一个圆（球的截面）和它的外切正方形（“牟合方盖”的截面）．设圆的半径为 a，则圆的面积等于 πa^2，外切正方形的面积等于 $4a^2$，于是得到在每一高度的水平截面截出的圆面与其外切正方形的面积比等于$\frac{\pi}{4}$．根据祖暅原理，球与“牟合方盖”的体积比也为$\frac{\pi}{4}$．

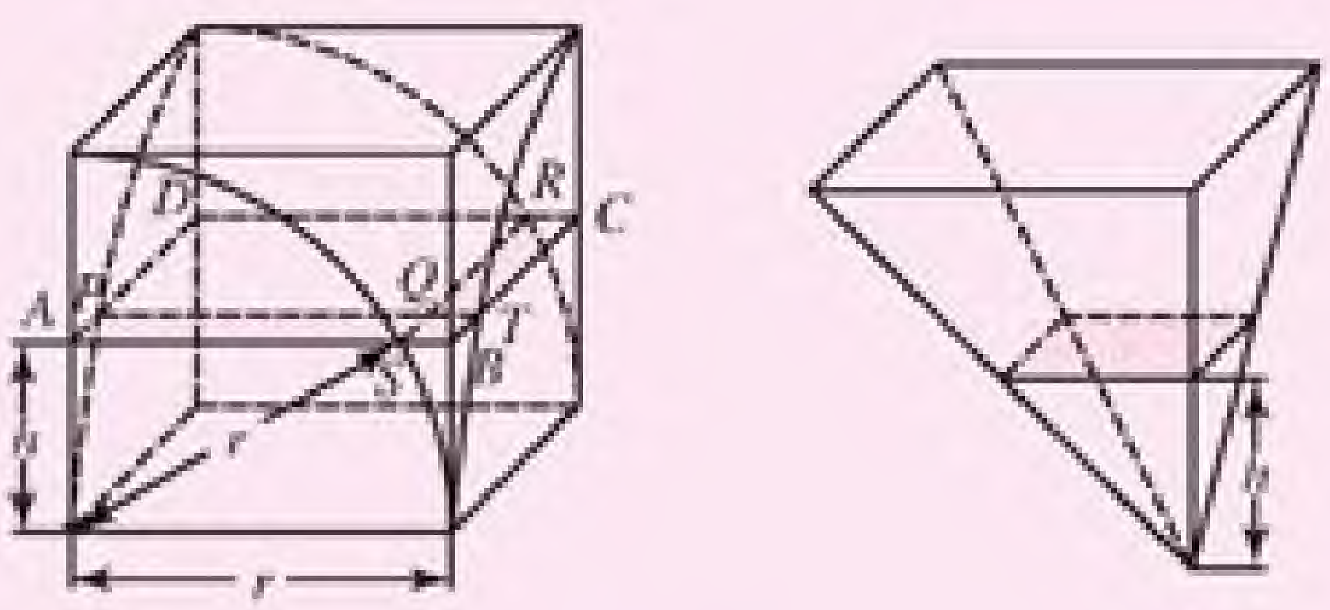


图 1-28

取“牟合方盖”的八分之一，然后作它的外切正方体，作以外切正方体的上底面为底，以该正方体一边为垂直边的倒方锥（图 1-28），则这个倒方锥的体积等于$\frac{1}{3}r^3$．把这个倒方锥与外切正方体放在同一平面上，用高度为 h 的水平截面，截倒方锥的截面面积为 h^2．截外切正方体的截面面积为 r^2，截“牟合方盖”的截面为正方形 $PQRD$．设 $AS=PQ=x$，则多边形 $ABCRQP$的面积为

$$S_{ABCD}-S_{PQRD}=r^2-x^2=h^2,$$

于是在任一相同的高处，外切正方体中挖去“牟合方盖”的部分的截面面积都与倒方锥的截面面积相等．根据祖暅原理，外切正方体中挖去“牟合方盖”的部分的体积与倒方锥的体积相等．因此八分之一“牟合方盖”的体积等于外切正方体的体积 r^3 减去倒方锥的体积$\frac{1}{3}r^3$．所以

$$V_{球}=\frac{\pi}{4}V_{牟合方盖}=\frac{\pi}{4}\times 8\times\left(r^3-\frac{1}{3}r^3\right)=\frac{4}{3}\pi r^3.$$

在 16 世纪与 17 世纪之交，微积分观念得到了一定的发展与广泛的应用．在此基础上，两位科学巨匠牛顿和莱布尼茨分别独立地创造了微积分学．他们不仅提出了完整的微分与积分概念，建立了比较完整的学科体系，而且把微积分运算广泛应用于物理学、力学、几何学与函数分析，获得了巨大的成功．牛顿和莱布尼茨对微积分学最突出的贡献是，他们发现了微分与积分的内在联系，建立了微积分基本定理：如果 $F'(x)=f(x)$，$f(x)$是可积的，则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a).$$

这样，困难的求积分问题就转化为求被积函数 $f(x)$的原函数$F(x)$的问题．这是微积分学历史上最重大的事件．

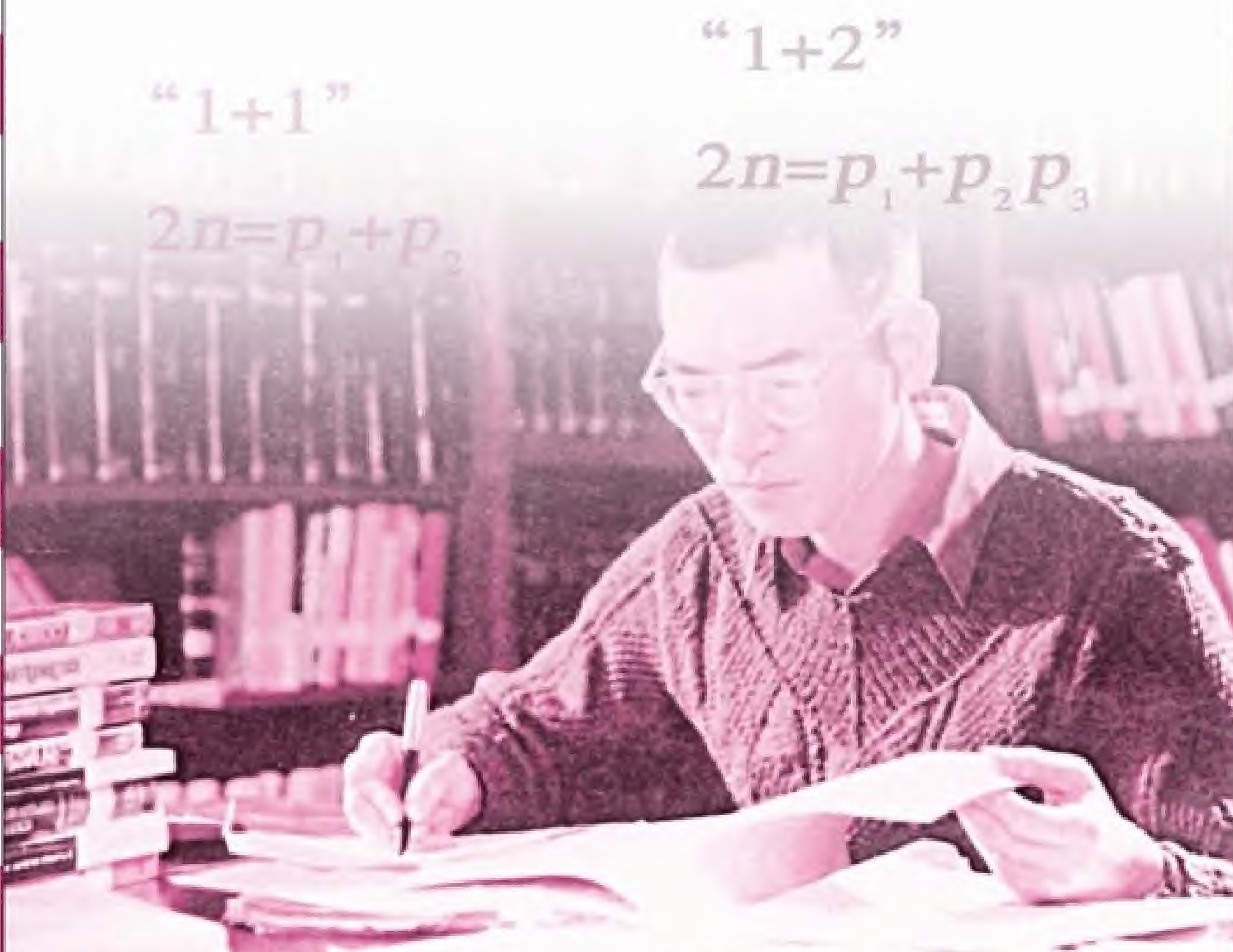
有了微积分基本定理，微积分学从繁琐的计算中解脱出来，并逐步被人们所应用、所接受．

第二章 推理与证明

2.1 合情推理与演绎推理

2.2 直接证明与间接证明

2.3 数学归纳法



同学们，你们看过侦探小说《福尔摩斯探案集》吗？现在，请你们阅读这本小说中描写推理的一个片段：

“……我曾经设法从爪印的大小揣画出这个动物的形象．这是它站着不动时的四个爪印．你看，从前爪到后爪的距离，至少有十五英寸．再加上头和颈部的长度，你就可以得出这动物至少长二英尺，如果有尾巴，那也可能还要长些．不过现在再来看看另外的尺寸．这个动物曾经走动过，我们量出了它走一步的距离，每一步只有三英寸左右．你就可以知道，这东西身体很长，腿很短．这东西虽没有留下什么毛来，但它的大致形状，一定和我所说的一样，它能爬上窗帘，它是一种食肉动物．”

“你是怎么推断出来的呢？”

“因为窗户上挂着一只金丝雀笼子，它爬到窗帘上，似乎是要攫取那只鸟．”

通过阅读上述文字，同学们可以初步感受到推理的意义和价值．事实上，推理是人的一种思维方式，它不仅在数学中有着不可替代的重要作用，而且在物理、化学、生物、医学、政治、经济、军事、历史等各个领域都有着广泛的应用．

在本章中同学们将学习合情推理与演绎推理．合情推理是一种含有较多猜想成分的推理，它有助于发现新的规律和事实．在数学中，通过合情推理得到的命题的真实性需要通过证明来确立．数学证明实际上是由一系列的演绎推理所组成的．在实际问题的解决过程中，合情推理和演绎推理紧密联系、相辅相成．

学习数学和研究数学最令人感到困惑也是最引人入胜的环节之一，就是如何发现新的规律和事实与怎样证明规律和事实．发现新的规律和事实我们更多地使用合情推理，而证明规律和事实一般运用演绎推理．本章我们将结合已经学过的数学实例，学习分析法、综合法和反证法．同时，我们还将了解数学归纳法的基本原理，学习用数学归纳法证明一些简单的数学命题，以进一步掌握演绎推理的基本方法．

2.1 合情推理与演绎推理

在日常生活中，我们经常会自觉或不自觉地根据一个或几个已知事实（或假设）得出一个判断. 例如，当我们看到天空乌云密布、燕子低飞、蚂蚁搬家等现象时，会得出即将下雨的判断. 这种思维方式就是**推理**.

从结构上说，推理一般由两部分组成，一部分是已知的事实（或假设），叫做**前提**；一部分是由已知推出的判断，叫做**结论**. 例如，推理

$$\frac{a /\!/ b,\ b /\!/ c}{a /\!/ c}$$

> 注
> 推理形式中，横线上面的判断是前提，横线下面的判断是结论.

中的“$a /\!/ b$，$b /\!/ c$”是前提，“$a /\!/ c$”是结论. 推理也可以看作是用连接词将前提和结论逻辑的连接，常用的连接词有：“因为……所以……”；“根据……可知……”；“如果……那么……”；等等.

推理一般分为合情推理与演绎推理.

2.1.1 合情推理

考察以下事例中的推理：

(1) 1856 年，法国微生物学家巴斯德发现乳酸杆菌是使啤酒变酸的原因，接着，通过对蚕病的研究，他发现细菌是引起蚕病的原因，据此，巴斯德推断人身上的一些传染病也是由细菌引起的；

(2) 我国地质学家李四光发现中国松辽地区和中亚细亚的地质结构类似，而中亚细亚有丰富的石油，由此，他推断松辽平原也蕴藏着丰富的石油；

(3) 因为三角形的内角和是 $180°\times(3-2)$，四边形的内角和是 $180°\times(4-2)$，五边形的内角和是 $180°\times(5-2)$……所以 n 边形的内角和是 $180°\times(n-2)$.

从上述事例可以发现，其中的推理所得结论都是可能为真的判断，像这种前提为真时，结论可能为真的推理，叫做**合情推理**.

> ？
> 物理学家的实验归纳、历史学家的典籍论证和经济学家的统计推断是合情推理吗？为什么？

归纳推理和类比推理是数学中常用的合情推理.

1. 归纳推理

在学习等差数列时，我们是这样推导首项为 a_1，公差为 d 的等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式的：

$$a_1=a_1+0d,$$
$$a_2=a_1+d=a_1+1d,$$
$$a_3=a_2+d=a_1+2d,$$
$$a_4=a_3+d=a_1+3d,$$
……

等差数列$\{a_n\}$的通项公式是 $a_n=a_1+(n-1)d$.

这种根据一类事物的部分对象具有某种性质，推出这类事物的所有对象都具有这种性质的推理，叫做**归纳推理**（简称**归纳**）. 归纳是从特殊到一般的过程.

下面，我们通过一个例子来得出归纳推理的一般步骤.

例如，当你看到这样的几个关系式

$$10=3+7,\ 20=3+17,\ 30=13+17$$

时，你会发现：3，7，13 和 17 这些数字都是奇质数，偶数 10，20 和 30 都可以表示为两个奇质数的和. 其他的偶数又怎么样呢？它们也有类似的性质吗？显然，第一个等于两个奇质数之和的偶数是

$$6=3+3.$$

接下去，还有

$$8=3+5,$$
$$10=3+7=5+5,$$
$$12=5+7,$$
$$14=3+11=7+7,$$
$$16=3+13=5+11.$$

这样下去总是对的吗？无论如何，所观察到的个别情况，可以启发我们提出一个一般性的命题：**任何一个大于 4 的偶数都是两个质数之和**❶.

> 归纳推理的一般步骤：
>
> **1.** 通过观察个别情况发现某些相同性质；
>
> **2.** 从已知的相同性质中推出一个明确表述的一般性命题（猜想）.

一般地，如果归纳的个别情况越多，越具有代表性，那么推广的一般性命题就越可能为真.

例 1 用推理的形式表示等差数列 1，3，5，…，$(2n-1)$，…的前 n 项和 S_n 的归纳过程.

解：对等差数列 1，3，5，…，$(2n-1)$，…的前 1，2，3，4，5，6 项和分别进行计算：

注

❶ 这个命题叫做哥德巴赫猜想，是由数学家哥德巴赫首先提出的，简称“一加一”，简记为“1+2”. 这个猜想至今没有得到证明. 我国数学家陈景润对证明此猜想作出了重大的阶段性成果，证明了“1+2”，即大偶数 N 都可表示为 $N=p_1+p_2$ 或 $N=p_1+p_2p_3$，其中 p_1，p_2，p_3 都是质数.

$S_1=1=1^2$；

$S_2=1+3=4=2^2$；

$S_3=1+3+5=9=3^2$；

$S_4=1+3+5+7=16=4^2$；

$S_5=1+3+5+7+9=25=5^2$；

$S_6=1+3+5+7+9+11=36=6^2$.

等差数列 1，3，5，…，$(2n-1)$，…的前 n 项和 $S_n=n^2$.

例 2 设 $f(n)=n^2+n+41$，$n\in \mathbf{N}_+$，计算 $f(1)$，$f(2)$，$f(3)$，$f(4)$，…，$f(10)$ 的值，同时作出归纳推理，并用 $n=40$ 验证猜想是否正确.

解：

$$f(1)=1^2+1+41=43,$$
$$f(2)=2^2+2+41=47,$$
$$f(3)=3^2+3+41=53,$$
$$f(4)=4^2+4+41=61,$$
$$f(5)=5^2+5+41=71,$$
$$f(6)=6^2+6+41=83,$$
$$f(7)=7^2+7+41=97,$$
$$f(8)=8^2+8+41=113,$$
$$f(9)=9^2+9+41=131,$$
$$f(10)=10^2+10+41=151.$$

43，47，53，61，71，83，97，113，131，151 都是质数.

当 n 取任何正整数时，$f(n)=n^2+n+41$ 的值都是质数.

因为当 $n=40$ 时，$f(40)=40^2+40+41=41\times 41$，所以 $f(40)$ 是合数. 因此，上面由归纳推理得到的猜想不正确.

虽然由归纳推理所得到的结论未必是正确的，但它所具有的由特殊到一般，由具体到抽象的认识功能，对于数学的发现却是十分有用的. 观察、实验、对有限的资料作归纳整理，提出带有规律性的猜想，是数学研究的基本方法之一.

归纳推理的前提与结论只具有或然性联系，结论不一定正确. 结论的正确性还需要理论证明或实践检验.

探索与研究

“复杂的多面体有许多面、顶点和棱”，这是多面体给人们最初的印象，那么多面体的面数 F、顶点数 V 和棱数 E 之间有什么关系呢？试用归纳推理得出它们之间的关系.

提示：数一数图 2-1 中的面数 F、顶点数 V 和棱数 E，得出表 2-1.

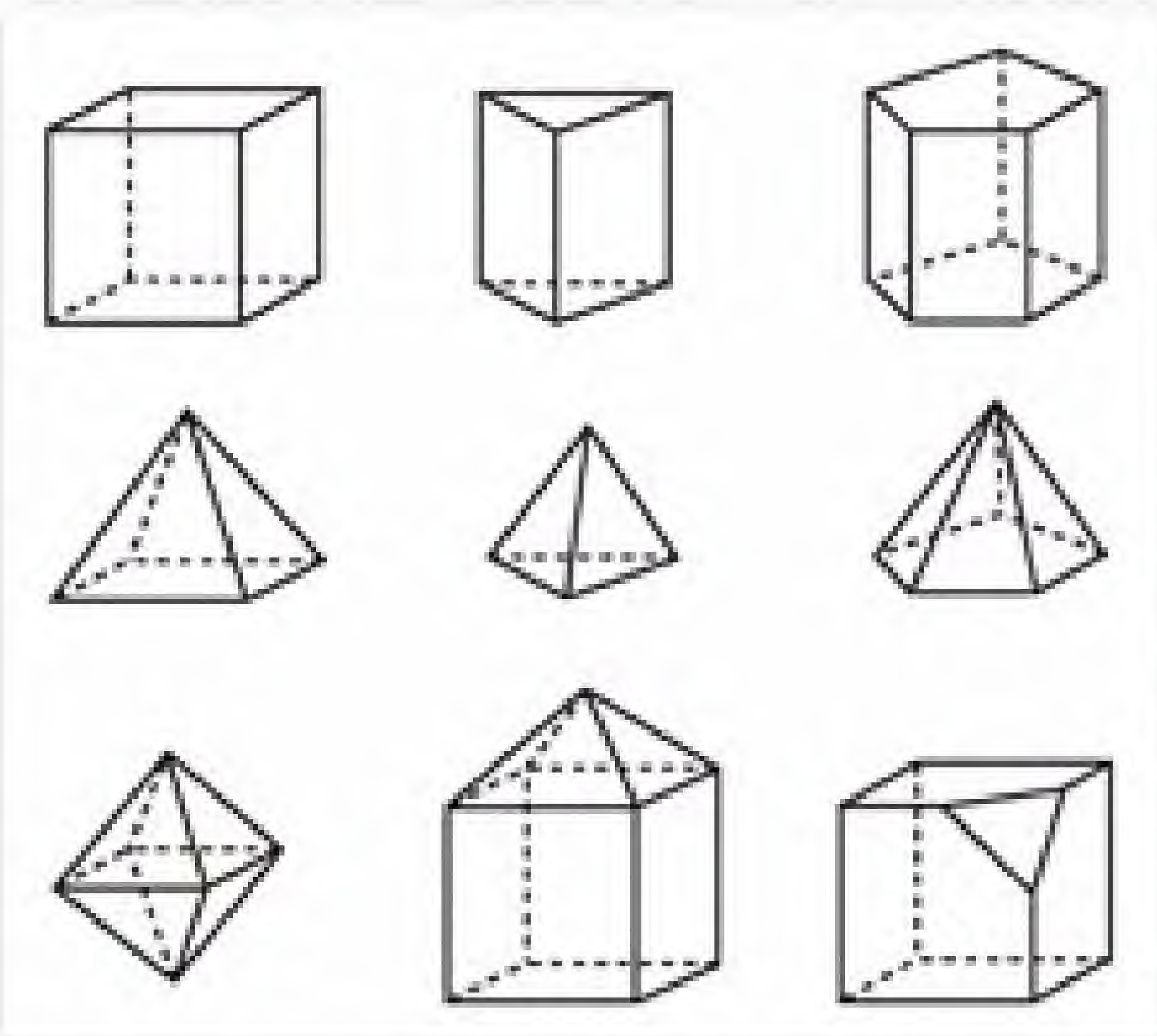


图 2-1

表 2-1

多面体	面数（F）	顶点数（V）	棱数（E）
三棱锥	4	4	6
四棱锥	5	5	8
三棱柱	5	6	9
五棱锥	6	6	10
立方体	6	8	12
正八面体	8	6	12
五棱柱	7	10	15
截角正方体	7	10	15
尖顶塔	9	9	16

练习A

1. 观察圆周上 n 个点之间所连的弦，发现两个点可以连一条弦，3 个点可以连 3 条弦，4 个点可以连 6 条弦，5 个点可以连 10 条弦，由此可以归纳出什么规律？
2. 应用归纳推理猜测 $\sqrt{\underbrace{111\cdots1}_{2n\text{个}1}-\underbrace{222\cdots2}_{n\text{个}2}}$ 的值（$n\in\mathbf{N}_+$）.

练习B

1. 已知 $1+2=3$，$1+2+3=6$，$1+2+3+4=10$，…，$1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，观察下列立方和：

   1^3，1^3+2^3，$1^3+2^3+3^3$，$1^3+2^3+3^3+4^3$，$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3$，….

   试归纳出上述求和的一般公式.
2. 圆周上两个点所连的弦将圆的内部分成两部分，3 个点所连的弦最多把圆的内部分成 4 部分，4 个点所连的弦最多把圆的内部分成 8 部分，5 个点所连的弦最多把圆的内部分成 16 部分，由此归纳出 n 个点所连的弦最多把圆的内部分成 2^{n-1} 部分. 这个结论正确吗？

2. 类比推理

在学习空间向量时，我们是这样推测空间向量基本定理的：

由于平面向量与空间向量都是既有大小又有方向的量，并且两者具有类似(或一致)的运算性质（如都具有加法的交换律和结合律等），因此根据平面向量基本定理，我们推测空间向量也具有类似的性质：

如果三个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 不共面，那么对空间任一向量 $\boldsymbol{p}$，存在一个唯一的有序实数组 x，y，z，使

$$\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}.$$

这种根据两类不同事物之间具有某些类似（或一致）性，推测其中一类事物具有与另一类事物类似(或相同）的性质的推理，叫做**类比推理**（简称**类比**）．类比属于合情推理❶．

> 注
>
> ❶ 事物的各个性质之间并不是孤立存在的，而是相互联系和相互制约的．如果两个事物在某些性质上相同或类似，那么它们在另一些性质上也可能相同或类似．类比的结论可能是真的，因此，类比属于合情推理．

下面我们通过一个例子来得出类比的一般步骤．

三角形与四面体有如下类似性质：

(1) 三角形是平面内由直线段所围成的最简单的封闭图形；四面体是空间中由平面所围成的最简单的封闭图形．

(2) 三角形可以看作平面上一条线段外一点与这条线段上各点连线所形成的图形；四面体可以看作三角形所在平面外一点与这个三角形上各点连线所形成的图形．

根据三角形的性质，可以推测空间四面体的性质如下：

三角形	四面体
三角形两边之和大于第三边．	四面体任意三个面的面积之和大于第四个面的面积．
三角形的三条内角平分线交于一点，且这个点是三角形内切圆的圆心．	四面体的六个二面角的平分面交于一点，且这个点是四面体内切球的球心．
三角形的中位线等于第三边的一半，且平行于第三边．	四面体的中截面（以任意三条棱的中点为顶点的三角形）的面积等于第四个面的面积的$\frac{1}{4}$，且平行于第四个面．

类比推理的一般步骤：

1. 找出两类事物之间的相似性或一致性；
2. 用一类事物的性质去推测另一类事物的性质，得出一个明确的命题（猜想）．

一般地，如果类比的相似性越多，相似的性质与推测的性质之间越相关，那么类比得出的命题就越可能为真.

例 3 找出圆与球的相似性质，并用圆的下列性质类比球的有关性质：

(1) 圆心与弦（非直径）中点的连线垂直于弦；

(2) 与圆心距离相等的两弦相等；

(3) 圆的周长 $C=\pi d$（d 是直径）；

(4) 圆的面积 $S=\pi r^2$.

解：圆与球有下列相似的性质：

(1) 圆是平面上到一定点的距离等于定长的所有点构成的集合；球面是空间中到一定点的距离等于定长的所有点构成的集合.

(2) 圆是平面内封闭的曲线所围成的对称图形；球是空间中封闭的曲面所围成的对称图形.

通过与圆的有关性质类比，可以推测球的有关性质：

圆	球
圆心与弦（非直径）中点的连线垂直于弦.	球心与截面圆（不经过球心的小截面圆）圆心的连线垂直于截面.
与圆心距离相等的两条弦长相等.	与球心距离相等的两个截面圆的面积相等.
圆的周长 $C=\pi d$.	球的表面积 $S=\pi d^2$.
圆的面积 $S=\pi r^2$.	球的体积 $V=\pi r^3$.

其中前三个类比得到的结论是正确的，最后一个则是错误的. 由此可见，类比的结论只具有或然性，即可能真，也可能假.

虽然由类比所得到的结论未必是正确的，但它所具有的由特殊到特殊的认识功能，对于发现新的规律和事实却是十分有用的.

探索与研究

在平面内，我们如果用一条直线去截正方形的一个角，那么截下的是一个直角三角形，按照图 2-2 所标边长由勾股定理有

$$c^2=a^2+b^2.$$

现在我们设想：把平面上的正方形换成空间中的正方体，把截线换成如图的截面. 这时从正方形截下的直角三角形换成了从正方体截下的三条侧棱两两垂直的三棱锥 O-LMN. 如果我们用 A，B，C 分别表示这个三棱锥的三个侧面的面积，用 D 表示底面 $\triangle LMN$ 的面积，这时空间图形的表面面积就相当于平面图形中的边长. 现在要问：在立体几何中，

和平面几何的勾股定理相类似的定理，将是什么？验证你的猜想.

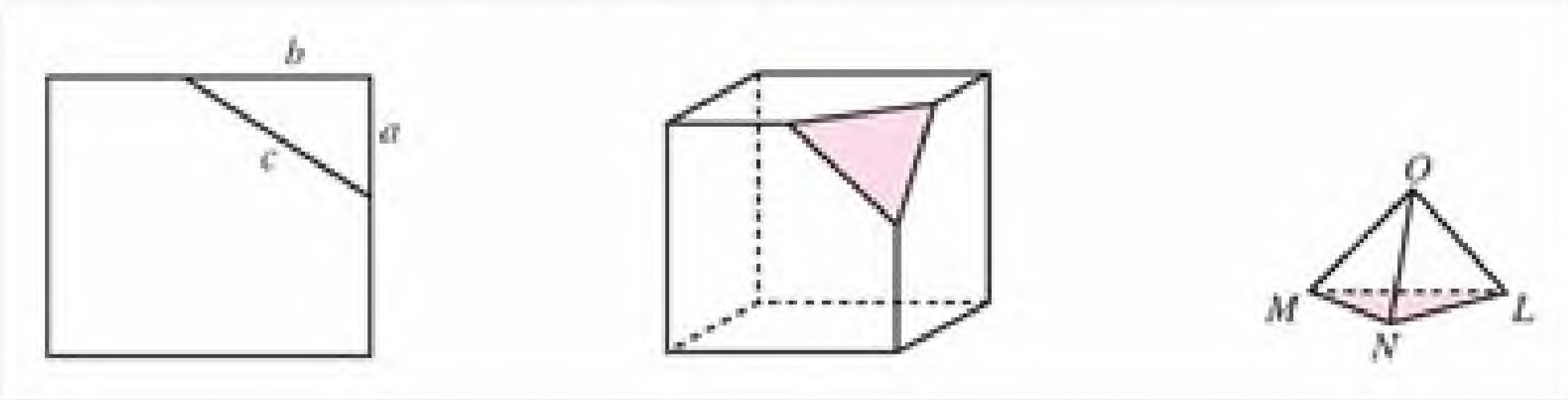


图 2-2

练习

把下面在平面内成立的结论类比地推广到空间，并判断类比的结论是否成立：

(1) 如果一条直线和两条平行线中的一条相交，则必和另一条相交.

(2) 如果两条直线同时垂直于第三条直线，则这两条直线互相平行.

2.1.2　演绎推理

我们先看一个简单的例子.

命题：等腰三角形的两底角相等.

已知：如图 2-3，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$.

求证：$\angle B=\angle C$.

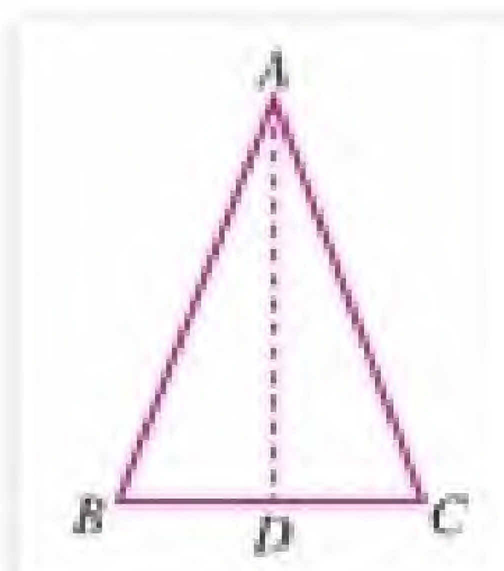


图 2-3

证明：作$\angle A$的角平分线AD，则$\angle BAD=\angle CAD$.

又因为　$AB=AC$，$AD=AD$，

所以　$\triangle ABD\cong\triangle ACD$.（SAS）

因此　$\angle B=\angle C$.

分析上述推理过程，若记

$$p_1：\angle BAD=\angle CAD，$$
$$p_2：AB=AC，$$
$$p_3：AD=AD，$$
$$p_4：\triangle ABD\cong\triangle ACD，$$
$$q：\angle B=\angle C，$$

则可以看出，我们是根据 p_1，p_2，p_3 三个条件为真，依据三角形全等的判定定理推出 p_4 为真，进而又根据三角形全等的定义，得到 q 为真．这种由概念的定义或一些真命题，依照一定的逻辑规则得到正确结论的过程，通常叫做**演绎推理**.

与合情推理不同的是，演绎推理的特征是：当前提为真时，结论必然为真.

演绎推理中经常使用的是由大前提、小前提得到结论的三段论推理. 例如

所有平行四边形对角线互相平分

菱形是平行四边形

所以，菱形的对角线互相平分

就是一个典型的三段论推理，其中大前提是“所有平行四边形对角线互相平分”，小前提是“菱形是平行四边形”，结论是“菱形的对角线互相平分”.

一般地，三段论可表示为

M 是 P

S 是 M

所以，S 是 P

其中大前提“M 是 P”提供一般性原理，小前提“S 是 M”指出一个特殊的对象，大前提和小前提结合，得出一般性原理和特殊对象之间的内在联系，从而得出结论“S 是 P”.

在数学中，证明命题的正确性，都是使用演绎推理. 而合情推理不能用作证明.

在实际使用三段论推理时，为了简洁起见，大家经常略去大前提或者小前提，有时甚至这两者都略去，例如“25 能被 5 整除”这个推理，就省略了大前提“末位数字为 5 的整数能被 5 整除”和小前提“25 是末位数字为 5 的整数”.

例 1 已知：空间四边形 $ABCD$ 中，点 E，F 分别是 AB，AD 的中点（图 2-4）.

求证：$EF /\!/$ 平面 BCD.

证明：连结 BD.

因为 点 E，F 分别是 AB，AD 的中点，

所以 $EF /\!/ BD$.

又因为 $EF \not\subset$ 平面 BCD，$BD \subset$ 平面 BCD，

所以 $EF /\!/$ 平面 BCD.

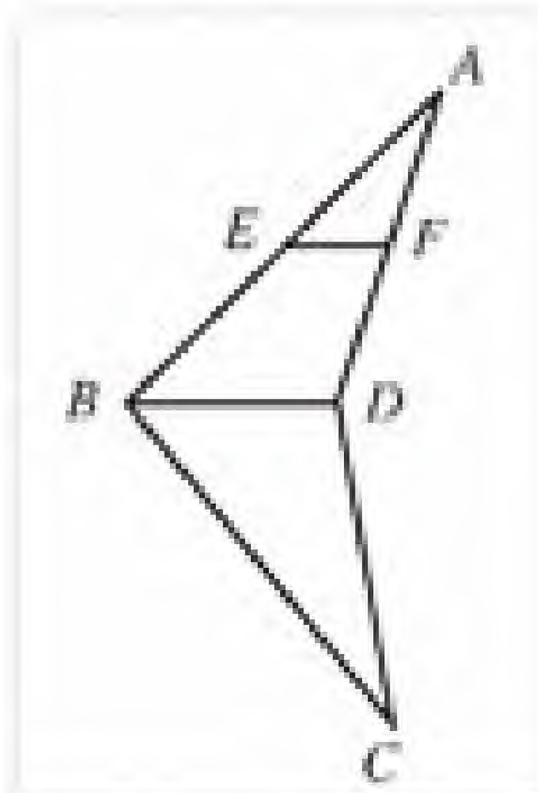


图 2-4

在这个例子中，实际上是两次使用了三段论推理：第一次是由 EF 是 $\triangle ABD$ 的中位线，推出 $EF /\!/ BD$，推理时省略了大前提“三角形的中位线平行于第三边”；第二次是由 $EF /\!/ BD$，推出 $EF /\!/$ 平面 BCD，推理时省略了大前提“如果平面外一条直线和这个平面内的一条直线平行，那么这条直线和这个平面平行”.

例 2 求证：当 $a>1$ 时，有

$$\log_a(a+1)>\log_{(a+1)}a.$$

证明：因为 $a>1$，所以

$$\log_a(a+1)>\log_a a=1. \quad ①$$

又因为 $a+1>1$，所以

$$\log_{(a+1)}a<\log_{(a+1)}(a+1)=1. \qquad ②$$

由①②两式可知

$$\log_a(a+1)>\log_{(a+1)}a.$$

在这个证明过程中，关键步骤是：(1) $\log_a(a+1)>1$，(2) $\log_{(a+1)}a<1$. 所以原式成立. 这里用到的推理规则是“如果 aRb，bRc，则 aRc”，其中“R”表示具有传递性的关系. 这种推理规则叫做传递性关系推理.

例 3 证明函数 $f(x)=x^6-x^3+x^2-x+1$ 的值恒为正数.

证明：当 $x<0$ 时，$f(x)$各项都为正数，因此，当$x<0$时，$f(x)$为正数；

当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，

$$f(x)=x^6+x^2(1-x)+(1-x)>0;$$

当 $x>1$ 时，

$$f(x)=x^3(x^3-1)+x(x-1)+1>0.$$

综上所述，函数 $f(x)$的值恒为正数.

在这个证明中，对 x 所有可能的取值都给出了 $f(x)$为正数的证明，所以断定 $f(x)$恒为正数，这种把所有情况都考虑在内的演绎推理规则叫做完全归纳推理. 又如，对所有的 n ($3\leqslant n\leqslant 10$)，证明 n 边形的内角和为$(n-2)\pi$，就是完全归纳证明.

练习A

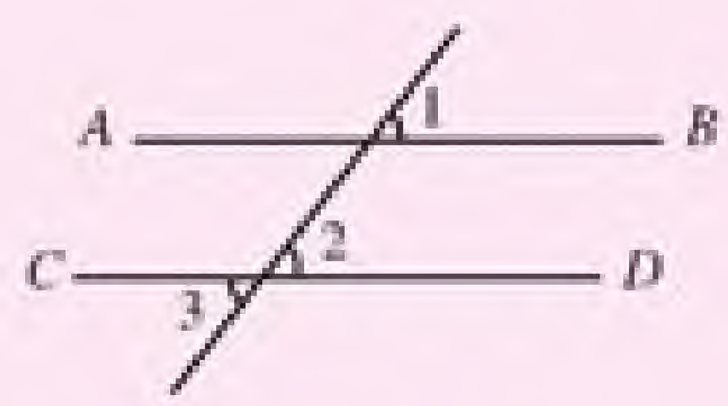
1. 下列推理的两个步骤分别遵循哪种推理规则？

   因为 $AB/\!/CD$，

   所以 $\angle 1=\angle 2$.

   又因为 $\angle 2=\angle 3$，

   所以 $\angle 1=\angle 3$.



(第 1 题)

2. 举例说明归纳推理与完全归纳推理的区别.

练习B

1. 写出三角形内角和定理的证明，指出每一步推理的大前提和小前提.
2. 运用完全归纳推理证明：函数 $f(x)=x^8-x^5+x^2-x+1$ 的值恒为正数.

习题 2-1 A

1. 观察

$$\frac{1}{2}(1\times2-0\times1)=1,$$

$$\frac{1}{2}(2\times3-1\times2)=2,$$

$$\frac{1}{2}(3\times4-2\times3)=3,$$

$$\frac{1}{2}(4\times5-3\times4)=4,$$

……

你能做出什么猜想？证明你的猜想.

2. 命题“正三角形内任一点到三边的距离等于常数”，对正四面体是否有类似的结论？

3. 判别下列推理是否正确：

(1) 如果不买彩票，那么就不能中奖. 因为你买了彩票，所以你一定中奖；

(2) 因为正方形的对角线互相平分且相等，所以一个四边形的对角线互相平分且相等，则此四边形是正方形；

(3) 因为 $a>b$，$a>c$，所以 $a-b>a-c$；

(4) 因为 $a>b$，$c>d$，所以 $a-d>b-c$.

习题 2-1 B

1. 代数中有乘法公式

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2,$$
$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3,$$

再以乘法运算继续求：

$$(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)=a^4-b^4,$$
$$(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)=a^5-b^5,$$

……

观察上述结果，你能做出什么猜想？

2. 判断下面的推理是否正确，并用符号表示其中蕴涵的推理规则：已知 $(m+1)(5m+1)$ 是5的倍数，可知或者 $m+1$ 是5的倍数，或者 $5m+1$ 是5的倍

数；因为 $5m+1$ 不是 5 的倍数，所以 $m+1$ 是 5 的倍数.

3. 求证：如果一条直线垂直于两条相交直线，那么此直线垂直于这两条相交直线所在的平面.

2.2 直接证明与间接证明

2.2.1 综合法与分析法

直接证明是从命题的条件或结论出发，根据已知的定义、公理、定理，直接推证结论的真实性. 常用的直接证明方法有综合法与分析法.

综合法是从原因推导到结果的思维方法，而分析法是一种从结果追溯到产生这一结果的原因的思维方法. 具体地说，综合法是从已知条件出发，经过逐步的推理，最后达到待证结论. 分析法则是从待证结论出发，一步一步寻求结论成立的充分条件，最后达到题设的已知条件或已被证明的事实.

先看两个综合法证明的例子.

例 1 求证：$\frac{1}{\log_5 19}+\frac{2}{\log_3 19}+\frac{3}{\log_2 19}<2$.

证明：因为 $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$，

所以 $$\begin{aligned}\text{左边}&=\log_{19}5+2\log_{19}3+3\log_{19}2\\&=\log_{19}5+\log_{19}3^2+\log_{19}2^3\\&=\log_{19}(5\times 3^2\times 2^3)\\&=\log_{19}360.\end{aligned}$$

因为 $\log_{19}360<\log_{19}361=2$，

所以 $\frac{1}{\log_5 19}+\frac{2}{\log_3 19}+\frac{3}{\log_2 19}<2$.

这个证明就是从已知条件出发，进行简单地运算和推理，得到要证明的结论. 其中要用到一些已经证明的命题.

例 2 如图 2-5，设在四面体 $PABC$ 中，$\angle ABC=90°$，$PA=PB=PC$，D 是 AC 的中点. 求证 PD 垂直于 $\triangle ABC$ 所在的平面.

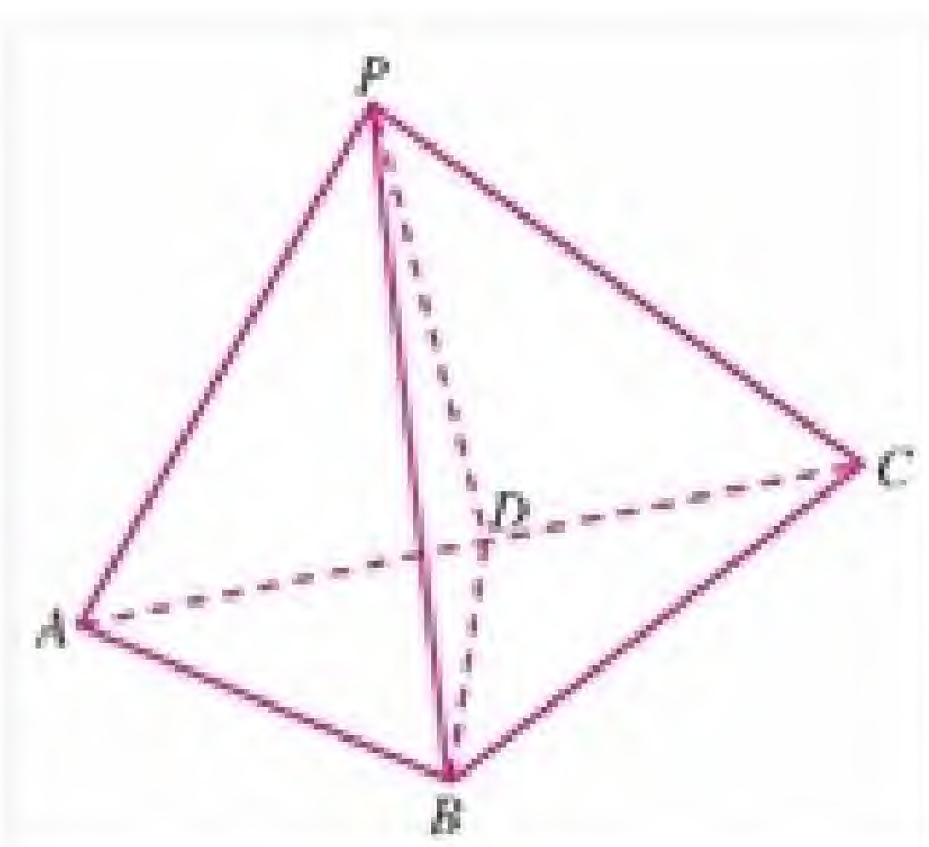


图 2-5

证明：连 PD，BD. 因为 BD 是 $\text{Rt}\triangle ABC$ 斜边上的中线，所以 $DA=DC=DB$. 又因为 $PA=PB=PC$，而 PD 是 $\triangle PAD$，$\triangle PBD$，$\triangle PCD$ 的公共边，所以

$$\triangle PAD\cong\triangle PBD\cong\triangle PCD.$$

于是 $\angle PDA=\angle PDB=\angle PDC$，而 $\angle PDA=\angle PDC=90°$，因此，$\angle PDB=90°$. 可见 $PD\perp AC$ 和 $PD\perp BD$. 由此可知 PD 垂直于 $\triangle ABC$ 所在的平面.

这个证明的步骤是：

（1）由已知 BD 是 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 斜边上的中线，推出 $DA=DB=DC$，记为 P_0（已知）$\Rightarrow P_1$；

（2）由 $DA=DB=DC$ 和已知条件，推出三个三角形全等，记为 $P_1\Rightarrow P_2$；

（3）由三个三角形全等，推出 $\angle PDA=\angle PDB=\angle PDC=90°$，记为 $P_2\Rightarrow P_3$；

（4）由 $\angle PDA=\angle PDB=\angle PDC=90°$ 推出 $PD\perp\triangle ABC$，记为 $P_3\Rightarrow P_4$（结论）．

这个证明步骤用符号表示就是

$$P_0\text{（已知）}\Rightarrow P_1\Rightarrow P_2\Rightarrow P_3\Rightarrow P_4\text{（结论）}.$$

这是一例典型的综合法证明．

接下来，我们看两个分析法的例子．

例 3 求证：$\sqrt{3}+\sqrt{7}<2\sqrt{5}$．

证明：因为 $\sqrt{3}+\sqrt{7}$ 和 $2\sqrt{5}$ 都是正数，所以为了证明

$$\sqrt{3}+\sqrt{7}<2\sqrt{5},$$

只需证明

$$(\sqrt{3}+\sqrt{7})^2<(2\sqrt{5})^2,$$

展开得

$$10+2\sqrt{21}<20,$$

即

$$\sqrt{21}<5,$$

只需证明

$$21<25.$$

因为 $21<25$ 成立，所以不等式 $\sqrt{3}+\sqrt{7}<2\sqrt{5}$ 成立．

用分析法证明的逻辑关系是：

$$B(\text{结论})\Leftarrow B_1\Leftarrow B_2\cdots\Leftarrow B_n\Leftarrow A(\text{已知}).$$

在分析法证明中，从结论出发的每一个步骤所得到的判断都是结论成立的充分条件．最后一步归结到已被证明了的事实．因此，从最后一步可以倒推回去，直到结论，但这个倒推过程可以省略．

例 4 求证：当一个圆与一个正方形的周长相等时，这个圆的面积比正方形的面积大．

证明：设圆和正方形的周长为 L，依题意，圆的面积为 $\pi\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2$，正方形的面积为 $\left(\frac{L}{4}\right)^2$．因此本题只需证明

$$\pi\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2>\left(\frac{L}{4}\right)^2.$$

为了证明上式成立，只需证明

$$\frac{\pi L^2}{4\pi^2}>\frac{L^2}{16},$$

两边同乘以正数 $\frac{4}{L^2}$，得

$$\frac{1}{\pi}>\frac{1}{4}.$$

因此，只需证明

$$4>\pi.$$

因为上式是成立的，所以

$$\pi\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2>\left(\frac{L}{4}\right)^2.$$

这就证明了，如果一个圆和一个正方形的周长相等，那么这个圆的面积比这个正方形的面积大.

从前面的例子可以看出，分析法的特点是：从“未知”看“需知”，逐步靠拢“已知”，其逐步推理，实际上是要寻找它的充分条件. 综合法的特点是：从“已知”看“可知”，逐步推向“未知”，其逐步推理，实际上是寻找它的必要条件. 分析法与综合法各有其特点. 有些具体的待证命题，用综合法或分析法都可以证明出来，人们往往选择比较简单的一种.

练习A

用综合法或分析法证明：

1. 已知 n 是大于 1 的自然数，求证：$\log_n(n+1)>\log_{n+1}(n+2)$.

2. 已知 a，b，c 表示 $\triangle ABC$ 的边长，$m>0$，求证：

$$\frac{a}{a+m}+\frac{b}{b+m}>\frac{c}{c+m}.$$

练习B

用综合法或分析法证明：

1. 求证：$\sqrt{a}-\sqrt{a-1}<\sqrt{a-2}-\sqrt{a-3}$ $(a\geqslant 3)$.

2. 如果 $3\sin\beta=\sin(2\alpha+\beta)$，求证 $\tan(\alpha+\beta)=2\tan\alpha$.

2.2.2 反证法

证明命题“设 p 为正整数，如果 p^2 是偶数，则 p 也是偶数”，我们可以不去直接证明 p 是偶数，而是否定 p 是偶数，然后得到矛盾，从而肯定 p 是偶数. 具体证明步骤如下：

假设 p 不是偶数，可令

$$p=2k+1,\ k \text{ 为整数}.$$

可得 $p^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1$，此式表明，p^2 是奇数，这与假设矛盾. 因此假设 p 不是偶数不成立，从而证明 p 为偶数.

一般地，由证明 $p\Rightarrow q$ 转向证明：

$$\neg q\Rightarrow r\Rightarrow\cdots\Rightarrow t,$$

t 与假设矛盾，或与某个真命题矛盾. 从而判定 $\neg q$ 为假，推出 q 为真的方法，叫做**反证法**.

应用反证法证明命题的真实性最经典的事例是，两千多年前，古希腊人用反证法证明了$\sqrt{2}$不是有理数以及质数有无穷多个.

例 1 证明$\sqrt{2}$不是有理数.

证明：假定$\sqrt{2}$是有理数，则可设$\sqrt{2}=\dfrac{p}{q}$，其中 p，q 为互质的正整数.

$\sqrt{2}=\dfrac{p}{q}$两边平方，变形后得

$$2q^2=p^2. \qquad ①$$

①式表明，p^2 是偶数，因此 p 也是偶数.

于是可令 $p=2l$，l 是正整数，代入（1）式，得

$$q^2=2l^2. \qquad ②$$

②式表明，q^2 是偶数，因此 q 也是偶数. 这样 p，q 有公因数 2，这与 p，q 互质矛盾. 因此，假设$\sqrt{2}$是有理数不成立. 于是，$\sqrt{2}$不是有理数.

例 2 证明质数有无穷多个.

证明：假定质数只有有限多个. 设全体质数为 p_1，p_2，p_3，…，p_n. 令

$$p=p_1p_2\cdots p_n+1.$$

显然，p 不含因数 p_1，p_2，…，p_n. p 要么是质数，要么含有除 p_1，p_2，…，p_n 之外的质因数. 这表明，除质数 p_1，p_2，…，p_n 之外，还有质数. 因此，假设质数只有有限多个不成立，于是，质数有无穷多个.

从上述两例看出，反证法不是直接去证明结论，而是先否定结论，在否定结论的基础上，运用演绎推理，导出矛盾，从而肯定结论的真实性.

所谓矛盾主要是指：

(1) 与假设矛盾（上述两例便是导致了与假设的矛盾）；

(2) 与数学公理、定理、公式、定义或已被证明了的结论矛盾；

(3) 与公认的简单事实矛盾（例如，导出 $0=1$，$0\neq 0$ 之类的矛盾）.

思考与讨论

反证法就是通过证明逆否命题来证明原命题，这种说法对吗？为什么？

例 3　证明：1，$\sqrt{3}$，2 不能为同一等差数列的三项.

证明：假设 1，$\sqrt{3}$，2 是某一等差数列的三项. 设这一等差数列的公差为 d，则

$$1=\sqrt{3}-md,\ 2=\sqrt{3}+nd,$$

其中 m，n 为某两个正整数. 由上面两式消去 d，得$n+2m=(n+m)\sqrt{3}$. 因为 $n+2m$ 为有理数，而$(n+m)\sqrt{3}$为无理数，所以$n+2m\neq(n+m)\sqrt{3}$. 因此假设不成立，1，$\sqrt{3}$，2 不能为同一等差数列的三项.

例 4　平面上有四个点，没有三点共线. 证明以每三点为顶点的三角形不可能都是锐角三角形.

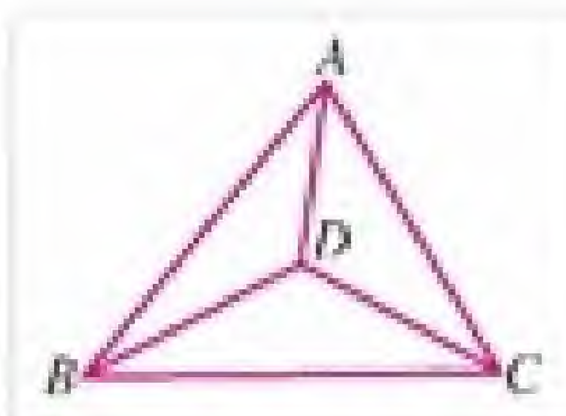


图 2-6

证明：假设以每三点为顶点的四个三角形都是锐角三角形. 记这四个点为 A，B，C，D.

考虑$\triangle ABC$，点 D 在$\triangle ABC$ 之内或之外两种情况.

(1) 如果点 D 在$\triangle ABC$ 之内(图2-6)，根据假设围绕点 D 的三个角都是锐角，其和小于 270°，这与一个周角等于 360°矛盾.

图 2-7

(2) 如果点 D 在$\triangle ABC$ 之外（图2-7），根据假设$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$，$\angle D$ 都小于 90°，这和四边形内角之和等于 360°矛盾.

综上所述，题中结论成立.

应用反证法证明数学命题的一般步骤：

1. 分清命题的条件和结论；

2. 做出与命题结论相矛盾的假设；

3. 由假设出发，应用演绎推理方法，推出矛盾的结果；

4. 断定产生矛盾结果的原因，在于开始所做的假定不真，于是原结论成立，从而间接地证明命题为真.

练习A

1. 用反证法证明：设直线 a，b，c 在同一平面上，如果 $a/\!/c$，$b/\!/c$，那么 $a/\!/b$.

2. 设 p 是质数，证明$\sqrt{p}$是无理数.

练习B

用反证法证明：

1. 如果 $x>\frac{1}{2}$，那么 $x^2+2x-1\neq 0$.

2. $\lg 2$ 是无理数.

习题2-2 A

1. 设实数 $x\neq -1$，求证：
$\frac{x^2-6x+5}{x^2+2x+1}\geqslant -\frac{1}{3}$.

2. 求证：$\sqrt{6}+\sqrt{7}>2\sqrt{2}+\sqrt{5}$.

3. 用反证法证明：过一点与一平面垂直的直线只有一条.

4. 设 p，q 是奇数，求证方程 $x^2+2px+2q=0$ 没有有理根.

习题2-2 B

1. 求证：$(ac+bd)^2\leqslant(a^2+b^2)(c^2+d^2)$.

2. 设有比例式

$$\frac{x}{y+z}=\frac{y}{z+x}=\frac{z}{x+y}.$$

由比例性质可得

$$\frac{x}{y+z}=\frac{y}{z+x}=\frac{z}{x+y}=\frac{x+y+z}{(y+z)+(z+x)+(x+y)}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{x}{y+z}=\frac{y}{z+x}=\frac{x-y}{(y+z)-(z+x)}=-1.$$

由此可得 $\frac{1}{2}=-1$.

试指出这个推理的错误所在.

3. 求证：正三棱锥的侧棱与底面的对边垂直.

4. 设 a，b，c，d 是正有理数，$\sqrt{c}$，$\sqrt{d}$ 是无理数，求证：$a\sqrt{c}+b\sqrt{d}$ 是无理数.

5. 设 a 为实数，$f(x)=x^2+ax+a$. 求证：$|f(1)|$ 与 $|f(2)|$ 中至少有一个不小于 $\frac{1}{2}$.

2.3 数学归纳法

2.3.1 数学归纳法

归纳推理是合情推理，它可以帮助我们发现规律，但是它不能用来证明数学结论．数学归纳法是一种证明方法，专门用来证明与自然数相关的命题．

例如，在本章 2.1 节的练习中，同学们用归纳推理猜想到

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}. \qquad (*)$$

这个猜想是一个与自然数相关的命题，其正确性有待证明．要证明公式（$*$）成立，原则上需要对每一个正整数 n 实施证明．但是这个证明的步骤是无限的，无法实施，需要另寻方法．数学归纳法可以用有限的步骤，完成这个命题的证明．其步骤如下：

（1）当 $n=1$ 时，（$*$）式左端等于 1，右端也等于 1．因此（$*$）式对 $n=1$ 成立；

（2）假设当 $n=k$ 时，（$*$）式成立，即假设

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}.$$

在此前提下，可推出

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3,$$

而

$$\begin{aligned}\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3&=(k+1)^2\left[\frac{k^2}{4}+(k+1)\right]\\&=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}.\end{aligned}$$

由此可见，在假设（$*$）式对 $n=k$ 成立的前提下，推出（$*$）式对 $n=k+1$ 成立．

于是，我们可以断定（$*$）式对一切正整数 n 成立．

同学们会问，为什么在完成了上述两个证明步骤后，就断定（$*$）式对一切正整数 n 成立呢？现作如下说明：

由步骤(1)，可知($*$)式对 $n=1$ 成立；由($*$)式对 $n=1$ 成立及步骤(2)，可知对 $n=1+1=2$，($*$)式成立；再由($*$)式对 $n=2$ 成立及步骤（2），可知($*$)式对 $n=2+1=3$ 成立．继续上述步骤，可知($*$)式对 $n=3+1=4$，$n=4+1=5$，$n=5+1=6$，…，$n=(k-1)+1=k$，…都成立．于是，($*$)式对一切正整数 n 都成立．

我们把上述证明方法一般化，叙述如下：

数学归纳法 一个与自然数相关的命题，如果（1）当 n 取第一个值 n_0 时命题成立；（2）在假设当 $n=k$（$k\in \mathbf{N}_+$，且 $k\geqslant n_0$）时命题成立的前提下，推出当 $n=k+1$ 时命题也成立，那么可以断定，这个命题对 n 取第一个值后面的所有正整数成立．

例 1 用数学归纳法来证明：如果$\{a_n\}$是一个等差数列，公差为 d，那么

$$a_n=a_1+(n-1)d.$$

对一切 $n\in\mathbf{N}_+$ 都成立.

证明：(1) 当 $n=1$ 时，左边$=a_1$，右边$=a_n=a_1+0d=a_1$，等式是成立的.

(2) 假设当 $n=k$ 时，等式成立，即

$$a_k=a_1+(k-1)d,$$

那么

$$\begin{aligned}a_{k+1}&=a_k+d\\&=[a_1+(k-1)d]+d\\&=a_1+[(k+1)-1]d.\end{aligned}$$

这就是说，当 $n=k+1$ 时，等式也成立.

由(1)和(2)可以断定，等式对任何 $n\in\mathbf{N}_+$ 都成立.

例 2 用数学归纳法证明

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2.$$

证明：(1) 当 $n=1$ 时，左边$=1$，右边$=1$，等式成立.

(2) 假设当 $n=k$ 时，等式成立，即

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2,$$

那么

$$\begin{aligned}&1+3+5+\cdots+(2k-1)+[2(k+1)-1]\\&=k^2+[2(k+1)-1]\\&=k^2+2k+1\\&=(k+1)^2.\end{aligned}$$

这就是说，当 $n=k+1$ 时等式也成立.

根据(1)和(2)，可知等式对任何 $n\in\mathbf{N}_+$ 都成立.

用数学归纳法证明命题的这两个步骤，是缺一不可的. 特别是步骤(1)，往往十分简单，但却是不可忽视的步骤. 例如，假设 $n=k$ 时，等式

$$2+4+6+\cdots+2n=n^2+n+1$$

成立，即

$$2+4+6+\cdots+2k=k^2+k+1$$

成立. 那么

$$\begin{aligned}&2+4+6+\cdots+2k+2(k+1)\\&=k^2+k+1+2(k+1)\\&=(k+1)^2+(k+1)+1.\end{aligned}$$

这就是说，如果 $n=k$ 时等式成立，那么 $n=k+1$ 时等式也成立. 但是如果仅根据这一步就得出等式对任何 $n\in\mathbf{N}_+$ 都成立的结论，那就错了. 事实上，当 $n=1$ 时，上式左边$=2$，右边$=1^2+1+1=3$，左边$\neq$右边. 而且等式对任何 n 都不成立. 这说明如果缺少步骤(1)这个基础，步骤(2)就没有意义了.

练习

1. 数学归纳法是演绎推理还是合情推理？
2. 用归纳推理猜想平面上 n 个圆最多有多少个交点，并用数学归纳法证明你的猜想.

2.3.2 数学归纳法应用举例

我们再来研究几个用数学归纳法证明的例子.

例 1　用数学归纳法证明

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

证明：(1) 当 $n=1$ 时，左边 $=1^2=1$，右边 $=\frac{1\times2\times3}{6}=1$，等式成立.

(2) 假设当 $n=k$ 时，等式成立，即

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6},$$

那么

$$\begin{aligned}&1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2\\=&\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2\\=&\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}\\=&\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}\\=&\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}\\=&\frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}.\end{aligned}$$

这就是说，当 $n=k+1$ 时等式也成立.

根据(1)和(2)，可知等式对任何 $n\in\mathbf{N}_+$ 都成立.

例 2　证明：平面上 n 个圆最多把平面分成 n^2-n+2 个区域.

证明：一个圆将平面分成 2 个区域，而当 $n=1$ 时，$n^2-n+2=2$. 因此结论当 $n=1$ 时成立.

假设当 $n=k$ 时，结论成立，即 k 个圆最多把平面分成 k^2-k+2 个区域．在此基础上增加一圆，为使区域最多，应使新增的圆与前 k 个圆都交于两点，于是新增 $2k$ 个交点．这 $2k$ 个交点将新圆分成 $2k$ 段弧，这 $2k$ 段弧将所经过的区域一分为二，因此新增 $2k$ 个区域．这样 $k+1$ 个圆最多把平面分成

$$(k^2-k+2)+2k=(k+1)^2-(k+1)+2$$

个区域，可见结论当 $n=k+1$ 时成立．于是结论对任何正整数 n 成立．

例 3　求证：当 $n\geqslant 5$ 时，$2^n>n^2$．

证明：当 $n=5$ 时，

$$2^5=32，\ 5^2=25，$$

因此　$2^5>5^2$．

假设当 $n=k$（$k\geqslant 5$）时，这个命题是正确的，那么由

$$\begin{aligned}2^{k+1}&=2\times 2^k>2\times k^2\\&\geqslant k^2+5k>k^2+2k+1\\&=(k+1)^2\end{aligned}$$

可知这个命题当 $n=k+1$ 时也是正确的．因此，这个命题对于所有大于或等于 5 的正整数 n 都正确．

练习A

用数学归纳法证明：

1. $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$．

2. $1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$．

3. 用数学归纳法证明：$x^{2n}-y^{2n}$ 能被 $x+y$ 整除（$n\in\mathbf{N}_+$）．

练习B

用数学归纳法证明：

1. $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\dfrac{1}{3}n(4n^2-1)$．

2. 平面内有 $n(n\geqslant 2)$ 条直线，其中任何两条不平行，任何三条不过同一点，证明交点的个数 $f(n)=\dfrac{n(n-1)}{2}$．

习题 2-3 A

1. 用数学归纳法证明：首项是 a_1，公比是 q 的等比数列的通项公式是

$$a_n=a_1q^{n-1}.$$

2. 用数学归纳法证明：$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.

3. 用数学归纳法证明：

(1) $2+4+6+\cdots+2n=n^2+n$；

(2) $2+2\times3+2\times3^2+\cdots+2\times3^{n-1}=3^n-1$.

4. 用数学归纳法分别证明等差数列的前 n 项和公式 $S_n=na_1+\frac{1}{2}n(n-1)d$ 与等比数列前 n 项和公式 $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}(q\neq1)$.

5. 用数学归纳法证明：

(1) $-1+3-5+\cdots+(-1)^n(2n-1)=(-1)^n n$；

(2) $\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$.

习题 2-3 B

1. 用数学归纳法证明：

$(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2+2(a_1a_2+a_1a_3+\cdots+a_{n-1}a_n)$ ($n\in\mathbf{N}_+$，且 $n\geqslant2$).

2. 用数学归纳法证明：

(1) $x^{2n-1}+y^{2n-1}$ ($n\in\mathbf{N}_+$) 能被 $x+y$ 整除；

(2) n^3+5n 能被 6 整除；

(3) $4^{2n+1}+3^{n+2}$ ($n\in\mathbf{N}_+$) 能被 13 整除.

3. 证明凸 n 边形的对角线的条数

$$f(n)=\frac{1}{2}n(n-3)\ (n\geqslant4).$$

4. 平面内 n 条直线，最多把平面划分成多少个区域？并证明你的结论.

本章小结

Ⅰ 知识结构

Ⅱ 思考与交流

1. 试举例说明归纳推理与类比推理的区别.
2. 演绎推理的特征是怎样的？试举例说明.
3. 合情推理与演绎推理各有怎样的特点？合情推理与演绎推理在数学中各起着怎样的作用，试举例说明.
4. 综合法与分析法各有怎样的特点？试举例说明.
5. 反证法的逻辑根据是什么？
6. 数学归纳法与归纳推理有什么区别？运用数学归纳法时应注意些什么？与同学交流并回答.

Ⅲ 巩固与提高

1. 考察下列各式：

$$1=0+1,$$
$$2+3+4=1+8,$$
$$5+6+7+8+9=8+27,$$
$$10+11+12+13+14+15+16=27+64.$$

你能做出什么一般性的猜想？能证明你的猜想吗？

2. 设 $f(1)=2$，$f(n)>0(n\in \mathbf{N}_+)$，且 $f(n_1+n_2)=f(n_1)f(n_2)$，试猜出 $f(n)$ 的解析式，并证明你的猜想.

3. 两平行直线被第三条直线所截，所得同位角相等，内错角相等，同旁内角互补. 试类比出相应的立体几何命题，并判定其真假.

4. 如果 a，b 都是正数，且 $a\neq b$，求证：

$$a^6+b^6>a^4b^2+a^2b^4.$$

5. 已知 a，b 都是正数，x，$y\in\mathbf{R}$，且 $a+b=1$，求证：

$$ax^2+by^2\geqslant (ax+by)^2.$$

6. 设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 中的 a，b，c 均为奇数，求证：方程 $f(x)=0$ 无整数根.

7. 已知函数 $f(x)$ 对其定义域内任意两个实数 a，b，当 $a<b$ 时，都有 $f(a)<f(b)$，试用反证法证明：函数图象与 x 轴至多有一个交点.

8. 用数学归纳法证明：

(1) $1\times2\times3+2\times3\times4+3\times4\times5+\cdots+n(n+1)(n+2)=\dfrac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$；

(2) $2^2+4^2+6^2+\cdots+(2n)^2=\dfrac{2}{3}n(n+1)(2n+1)$.

9. 用数学归纳法证明：

(1) $x^{2n}-1$ 能被 $x+1$ 整除；

(2) $6^{2n-1}+1$ 能被 7 整除；

(3) $n(n+1)(2n+1)$ 能被 6 整除.

10. 已知数列

$$\frac{1}{1\times2},\ \frac{1}{2\times3},\ \frac{1}{3\times4},\ \cdots,\ \frac{1}{n\times(n+1)},\ \cdots,$$

先计算前几项之和 S_1，S_2，S_3，再推测前 n 项之和 S_n 的表达式，并给出证明.

Ⅳ 自测与评估

1. 观察下列各式：

$$1=1,$$
$$1-4=-(1+2),$$
$$1-4+9=1+2+3,$$
$$1-4+9-16=-(1+2+3+4).$$

从上面各式你能做出什么猜想？证明你的猜想.

2. 平面几何中有对顶角相等. 请类比出相应的立体几何命题，并判定其真假.

3. 求证：

$$\lg\frac{|A|+|B|}{2}\geqslant\frac{\lg|A|+\lg|B|}{2}(AB\neq0).$$

4. 设 a，b 为实数，且 $|a|+|b|<1$，求证：方程 $x^2+ax+b=0$ 的两根的绝对值小于 1.

5. 求证：对于大于 1 的任意自然数 n，都有

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}.$$

数　学　文　化

阅读与欣赏

《原本》与公理化思想


欧几里得

《原本》是古希腊数学家欧几里得（Euclid，约前330—前275）用公理建立起来的演绎体系的最早典范．在此之前，人们所积累下来的数学知识是片断的、零散的．欧几里得借助于逻辑方法，把这些知识组织起来，整理在一个比较严格的演绎体系之中．《原本》的出现对整个数学的发展产生了深远的影响，现代数学和各门科学中广泛使用的公理化方法就是从《原本》发展而来的．

《原本》共分13卷，其中第1卷首先给出23个定义、5个公设和5条公理，近代数学不分公设与公理，凡是基本假定都叫做公理．《原本》后面各卷不再列出公理．这一卷在给出的定义、公设和公理的基础上利用逻辑推理证明了48个命题．其余各卷与第1卷类似，首先给出定义，之后是命题的证明．欧几里得从119个定义、5个公设和5条公理出发，推出了465个命题．

《原本》中所体现的从尽可能少的基本概念和尽可能少的不加证明的公设和公理出发，应用逻辑推理，推导出其他命题，以使数学知识系统化的思想（或方法），就是公理化思想（或方法）．一个公理化系统（如欧氏几何、非欧几何、自然数系统、牛顿力学，乃至政治经济学领域的马克思“资本论”等）的基本结构是：不加定义的对象、定义、公理，推出其他定理．

但在《原本》面世后，人们感到欧氏的第5公设（平行公设）不像一条公理，而像一条定理，人们试图用欧氏的其他公设去证明平行公理，但都无功而返．19世纪，三位伟大的数学家罗巴切夫斯基（N. I. Lobachevsky，1792—1856）、高斯（C. F. Gauss，1777—1855）和波约（J. Bolyai，1802—1860）独立得到结论：平行公理是不可证明的，否定或者肯定平行公理都可以建立一套几何体系，从而引发了数学的一次深刻革命．年轻的俄国数学家罗巴切夫斯基保留其他公设去掉第五公设，引入了一个与第五公设完全相反的公设：过平面上已知直线外的一点至少可以引出两条直线与该已知直线平行．在此基础上，罗巴切夫斯基构造出了一种全新的几何体系．1854年数学家黎曼（G. F. B. Riemann，1826—1866）又发表了一种与《原本》不同的几何体系，他用“平面上任意两条直线都相交”取代平行公设．从此非欧几何开始被人们所承认．非欧几何的建立使人们对数学的本质有了崭新的认识．

1899年希尔伯特《几何基础》一书发表，公理化方法进入到了完全形式化的阶段，形式化的公理化方法得到了全面的发展，并进入了数学领域的各个分支．同时，希尔伯特提出将数学全盘公理化的计划，使各门数学成为一个以公理为基础的完备的理论系统．1931年，奥地利数学家哥德尔（K. Gödel，1906—1978）严格证明了不完备性定理．大意是说，任何一个理论系统，都存在不可判断的命题，同时系统的无矛盾性不可

能在本系统获得证明，哥德尔的结论彻底推毁了希尔伯特计划，断绝了企图证明任何一个系统内部无矛盾的全部希望．这使人们对公理化方法的认识提高到一个新的阶段，公理化方法和其他思想方法一样都有局限性．

数学证明的机械化——机器证明

机器证明是用机器证明数学命题，也称为机械证明或自动证明．电子计算机（电脑）具有推理的某些功能．机器证明是人工智能领域研究的重要课题．从传统的手工证明发展到机器证明，是数学思想方法的重大飞跃．

德国数学家希尔伯特在1899年出版的《几何基础》中指出，初等几何中只涉及从属与平行关系的定理可以实现证明的机械化．1950年，波兰数理逻辑学家塔尔斯基进一步从理论上证明，初等代数和初等几何的定理可以实现证明的机械化．

20世纪初完善的数理逻辑为机器证明提供了理论和方法．1956年纽厄尔、西蒙等人建立了机器证明定理的启发式搜索法，编制了一个“逻辑理论家”程序，用计算机证明了罗素的名著《数学原理》第二章的所有定理．人们认为这是机器证明的开端．50年代末美籍华人王浩发明了“王浩算法”，把机器证明过程规则化．1959年，他只用了9分钟的机器时间，就在计算机上证明了罗素等著的《数学原理》中的几百条定理，引起数学界的轰动．

1977年，我国数学家吴文俊发表了题为“初等几何判定问题与机械化证明”的论文，提出了一个证明等式型初等几何定理的新的代数方法．这个方法虽然不能证明几何不等式，但在证明等式型几何定理时的效率比以前的方法高得多．

吴文俊

国际上把这个方法叫做吴方法（Wu Method）．吴方法在国际自动推理研究领域广为传播，为机器证明的发展做出了巨大的贡献．

吴方法分为三个主要步骤：

第一步，从几何的公理系统出发，引进数系统与坐标系统，使任意几何定理的证明问题成为纯代数问题．

第二步，将几何定理假设部分的代数关系式进行整理，然后依据确定步骤验证定理终结部分的代数关系式是否可以从假设部分已整理有序的代数关系式中推出．

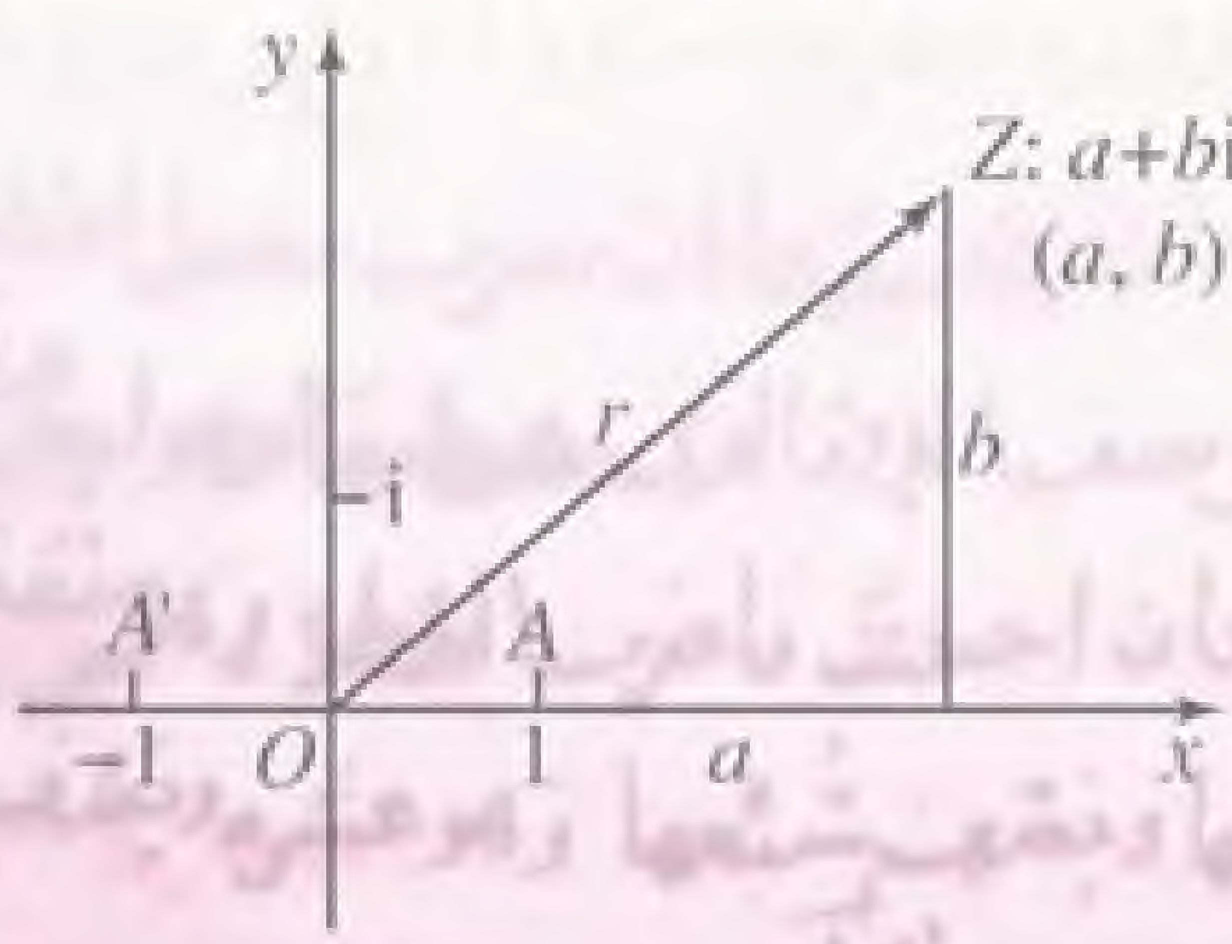
第三步，依据第二步中的确定步骤编成程序，并在计算机上实施，以得出定理是否成立的最后结论．

人们注意到，机械化证明不可能完全取代人工证明．更何况人工证明是培训人们思维能力的重要手段．

第三章 数系的扩充与复数

3.1 数系的扩充与复数的概念

3.2 复数的运算



从 16 世纪开始，解高于一次方程的需要导致复数的形成．高斯把复数和平面上的点一一对应，引进了“复数”这个名词．现在复数已成为科学技术中普遍应用的一种数学工具．

随着人类社会的不断发展，数的范围也不断扩大．经过漫长的岁月，数系从自然数逐步扩充到有理数．两千多年前，人类发现了无理数，数的范围扩充到实数．四百年前，人们在求解方程 $x^2+1=0$ 时，引进了“虚无缥渺”的虚数，从而把数的范围从实数系扩大到复数系．

数系扩充的动力在两个方面．一方面是现实的需要，另一方面是人类理性思维的驱动．数系的每一步扩充，都是人类文明的一次飞跃．

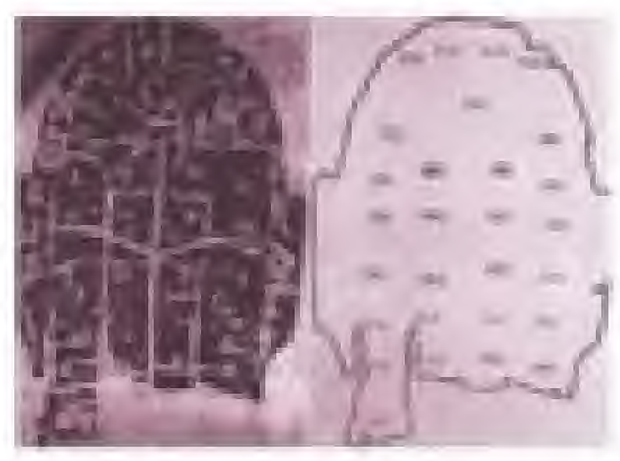
本章将通过介绍数系扩充的简要进程，使同学们感受人类理性思维对数学的发展所起的重要作用，体会数与现实世界的联系．本章还将简述复数的概念、复数的几何意义和运算法则，使同学们对复数有一些初步认识，能够解决一些简单的理论与实际问题．

3.1 数系的扩充与复数的概念

3.1.1 实数系

结绳计数

远古的人类，为了适应统计捕获的猎物和采集的野果等方面的需要，用手指、石子或刻痕数个数．经历了漫长的岁月，创造了自然数 1，2，3，4，5，….后来人们把表示“无”的 0 也归入自然数，形成了自然数集，自然数集也称作自然数系．自然数系是产生其他一切数的源泉．所有其他数系都是由其扩充得到的．



殷墟甲骨上的数字

大约在四千年前，在公平分配物质的时候，人们发现自然数不够用．例如，三人平分一个西瓜，把西瓜切成相同的三份，每人得到其中的一份．怎样用数表示这一份呢？诸如此类的问题很多．

设 m，n（$n\neq 0$）是自然数，如果数量 a 满足条件

$$a\times n=m,$$

则称 a 为分数❶，记作 $\frac{m}{n}$．于是，$\frac{m}{n}\times n=m$．根据除法是乘法的逆运算可知 $\frac{m}{n}=m\div n$．这样，分数是两个自然数之比．

> 注
> ❶ 这时的分数集是自然数集的扩充，包括自然数和两个自然数之比．

两千年前，中国人发现，具有相反意义的两种量，例如收入与支出、上升与下降、入库与出库等等，可用相反数表示，引进了与分数相反的负数．

从解方程的角度，负数是这样引进的：设 a 是分数（两个自然数之比），且 $a\neq 0$，方程 $x+a=0$ 在分数范围内无解．为了解决这个矛盾，数的范围必须扩充．我们把方程 $x+a=0$ 的解叫做 a 的相反数，并记作 $-a$．这样，$x=-a$ 便是方程 $x+a=0$ 的解：

$$(-a)+a=a+(-a)=0.$$

a（两个自然数之比，$a\neq 0$）称作正数，其相反数 $-a$ 称作负数．从此，数的范围扩大到包括分数和它们的相反数的新数集——有理数集．有理数集也称作有理数系．有理数实际上是两个整数之比．

有理数具有良好的性质：

（1）有理数对四则运算是封闭的，即两个有理数进行四则运算的结果仍然是有理数；

（2）0 与 1 的性质：$a+0=0+a=a$，$1\cdot a=a\cdot 1=a$；

（3）加法和乘法都满足交换律、结合律，乘法对加法满足分配律.

两千多年前，富于理性思维的希腊人，感悟到两个同类量并不总是可以公度的❶. 换言之，仅用有理数表示事物的数量是不够的. 他们发现正方形和正五边形的边长和对角线是不可公度的. 这意味着，边长为 1 的正方形和正五边形的对角线不能用有理数表示. 这个发现如石破天惊，震撼了当时的科学界. 从此人类引进了无理数（不是两个整数之比的数）. 这样，数系从有理数扩大到包括有理数和无理数的实数系.

有理数和开方开不尽的数的集合并不等同于实数集. 它只是实数集的真子集. 例如，e 和 π，它们是无理数，但不是由有理数经过开方运算得到的数. 那么实数到底是什么？由于实数是从有理数集扩充而来，只能从有理数那里找依据. 我们可以这样理解：实数就是小数，而小数包括有限小数（含整数）、无限循环小数和无限不循环小数.

注

❶存在一个单位量，去度量两个同类量，都得到整数倍，则称这两个量是可公度的. 例如，用一个长度 l_0 作单位，去度量两条直线段 l_1，l_2，得到

$$l_1=n_1l_0,$$
$$l_2=n_2l_0,$$

其中 n_1，n_2 为自然数，则称 l_1 与 l_2 是可公度的. 这时

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{n_1}{n_2}$$

是分数.

至此，数系扩充的脉络是

$$\text{自然数系}\longrightarrow\text{有理数系}\longrightarrow\text{实数系},$$

用集合符号表示是

$$\mathbf{N}\subsetneqq\mathbf{Q}\subsetneqq\mathbf{R},$$

前者是后者的真子集.

实数系不仅具有有理数系所具有的性质（1）（2）（3），而且和数轴上的点可以建立一一对应的关系. 换言之，实数所对应的点充满了整个数轴而没有任何空隙. 这为研究函数与微积分奠定了坚实的基础.

思考与讨论

数系扩充后，新数系应遵循原数系的运算律，这是一个原则. 根据这个原则，讨论“规定 $(-a)\times(-b)=a\times b$”的合理性.

探索与研究

设 $x_1=1$，$x_n=1+\dfrac{1}{1+x_{n-1}}$，$n=2, 3, 4, \cdots$，用计算机计算 x_2，x_3，x_4，…，x_{10}.

猜想数列 $\{x_n\}$ 随着 n 的增大，越来越接近什么数？

练习A

1. 自然数系对四则运算是封闭的吗？
2. 设“$*$”表示下列运算：$a*b=\frac{a+b}{2}$，这种运算满足结合律吗？
3. 从你熟悉的运算中，列举三种运算，它们都不满足交换律.
4. 设 N 为正整数，证明 $\lg N$ 不是整数就是无理数.

练习B

1. 证明 $\sin 20°$是无理数.（提示：将 $\sin 60°$化成 $\sin 20°$的表达式.）
2. 已知单位长度，画一个面积为 5 的正方形.

3.1.2 复数的概念

同学们知道，当 a，b 为正分数时，方程 $ax+b=0$ 在正分数范围内没有解. 当我们把数的范围扩充到有理数系以后，这个方程在有理数范围内，恰有一个解：$x=-\frac{b}{a}$.

方程 $x^2-2=0$ 在有理数系没有解，但是当把数的范围扩充到实数系以后，这个二次方程恰有两个解：$x=\pm\sqrt{2}$.

同学们在解一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的时候，会遇到判别式 $\Delta=b^2-4ac<0$ 的情况. 这时在实数范围内方程无解. 其根本原因是任何实数的平方都不可能是负数. 这样一元二次方程有的有两个实数解，有的没有实数解.

进而考虑一元三次方程，如 $x^3-x=0$ 有三个解：$x=-1$，0，1. 而 $x^3-1=0$ 只有一个实数解：$x=1$.

如此看来，在实数范围内，方程解的个数与方程次数的关系并不确定. 一个自然的想法是把实数系扩大，可否使二次方程都有两个解，三次方程都有三个解……

为了解决这个问题，人们引进了一个新数. 当时人们认为这个新数是一个“虚幻”的数，便以“虚数”（imaginary number）命名，并以英文名称的字首 i 记之. 虚数 i 满足 $i^2=-1$.

引进了虚数 i 以后，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 总有两个根：

$$x=\begin{cases}\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}，当 b^2-4ac\geqslant 0\\ \dfrac{-b}{2a}\pm\dfrac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\mathrm{i}，当 b^2-4ac<0\end{cases}$$

一般地说，三次方程可化为一个一次方程和一个二次方程，例如三次方程 $x^3-1=0$ 可化为

$$(x-1)(x^2+x+1)=0,$$

即
$$x-1=0，x^2+x+1=0.$$

解这两个方程得 $x_1=1$，$x_{2,3}=\dfrac{-1\pm\sqrt{4-1}\mathrm{i}}{2}=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$. 这样三次方程恰有三个根.

以上方程的根可以统一表示为

$$a+b\mathrm{i}\ (a，b 为实数)$$

的形式. 由此引出复数的概念. 复数的引进，实现了人们的一个理想：复系数的一元 n 次方程在复数范围内恰有 n 个根❶.

注

❶“复系数的一元 n 次方程在复数系至少有一个根”叫做代数基本定理，此定理由高斯所证明. 根据代数基本定理，可以导出“复系数的一元 n 次方程在复数系恰有 n 个根.”

设 a，b 都是实数，形如 $a+b\mathrm{i}$ 的数叫做**复数**，复数通常用小写字母 z 表示，即 $z=a+b\mathrm{i}$ (a，$b\in\mathbf{R}$)，其中 a 叫做复数 z 的**实部**，b 叫做复数 z 的**虚部**，i 称作**虚数单位**.

例如，$3+4\mathrm{i}$ 是复数，实部是 3，虚部是 4；$-0.5\mathrm{i}$ 是复数，实部是 0，虚部是 -0.5；3 是复数，实部是 3，虚部是 0.

显然，当 $b=0$ 时，复数就成为实数；除了实数以外的数，即当 $b\neq 0$ 时，$a+b\mathrm{i}$ 叫做**虚数**. 而当 $b\neq 0$ 且 $a=0$ 时，$b\mathrm{i}$ 叫做**纯虚数**.

例如，$3+4\mathrm{i}$，$-0.5\mathrm{i}$ 都是虚数；而 $3\mathrm{i}$，$-0.5\mathrm{i}$ 都是纯虚数. $0+0\mathrm{i}$ 表示数 0.

全体复数所构成的集合叫做**复数集**. 也称复系数. 复数集通常用大写字母 $\mathbf{C}$ 表示，即

$$\mathbf{C}=\{z\mid z=a+b\mathrm{i}，a\in\mathbf{R}，b\in\mathbf{R}\}.$$

显然，实数集 $\mathbf{R}$ 是复数集 $\mathbf{C}$ 的真子集，即 $\mathbf{R}\subsetneqq\mathbf{C}$.

因此，复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 可以这样分类：

$$复数 z\begin{cases}实数(b=0)\\ 虚数(b\neq 0)\end{cases}$$

由此可见，复数集是实数集的扩充.

例 1 实数 x 取何值时，复数 $z=(x-2)+(x+3)\mathrm{i}$ (1) 是实数？ (2) 是虚数？ (3) 是纯虚数？

分析：因为 x 是实数，所以 $x-2$，$x+3$ 也是实数. 由复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 是实数、虚数和纯虚数的条件可以确定 x 的值.

解：(1) 当 $x+3=0$，即 $x=-3$ 时，复数 z 是实数；

(2) 当 $x+3\neq 0$，即 $x\neq -3$ 时，复数 z 是虚数；

(3) 当 $x-2=0$，且 $x+3\neq 0$ 时，即 $x=2$ 时，复数 z 是纯虚数.

如果两个复数 $a+bi$ 与 $c+di$ 的实部与虚部对应相等，我们就说这两个**复数相等**. 记作

$$a+bi=c+di.$$

这就是说，如果 a，b，c，d 都是实数，那么

$$\boxed{\begin{gathered}a+bi=c+di \Leftrightarrow a=c, \text{且 } b=d;\\ a+bi=0 \Leftrightarrow a=0, \text{且 } b=0.\end{gathered}}$$

应当注意，两个实数可以比较大小，但是两个复数，如果不全是实数，它们之间就不能比较大小，只能说相等或不相等. 例如，$2+i$ 和 $3-i$，3 和 i 之间无大小可言.

例 2 求适合下列方程的 x 和 y（x，$y\in\mathbf{R}$）的值：

(1) $(x+2y)-i=6x+(x-y)i$；

(2) $(x+y+1)-(x-y+2)i=0$.

解：(1) 根据复数相等的定义，得

$$\begin{cases}x+2y=6x\\-1=x-y\end{cases}$$

解这个方程组，得

$$x=\frac{2}{3},\ y=\frac{5}{3}.$$

(2) 由复数等于 0 的充要条件，得

$$\begin{cases}x+y+1=0\\-(x-y+2)=0\end{cases}$$

解这个方程组，得

$$x=-\frac{3}{2},\ y=\frac{1}{2}.$$

练习A

1. 说出下列各数中，哪些是实数？哪些是虚数？哪些是复数？

$2+\sqrt{2}$，0.618，3i，0，i，i^2，$5+2i$，$3-\sqrt{2}i$，$(1+\sqrt{3})i$，$2+\sqrt{2}i$.

2. 写出下列各复数的实部和虚部：

$-3+2i$，$3+7i$，$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，$-8$，$-6i$.

3. 求适合下列方程的 x 和 y（x，$y\in\mathbf{R}$）的值：

(1) $(x-2y)+(2x+3y)i=3-3i$；

(2) $(3x+y+3)=(x-y-3)i$；

(3) $(x+y-3)+(x-y-1)i=0$.

练习B

1. 试用集合符号表示复数集(**C**)、实数集(**R**)、有理数集(**Q**) 和整数集(**Z**) 之间的关系.
2. 试问 $x(x\in\mathbf{R})$ 取何值时，复数 $(x^2+x-2)+(x^2+3x+2)\mathrm{i}$ 是实数？是虚数？是纯虚数？
3. 解方程 $x^2-10x+40=0$.

3.1.3 复数的几何意义

根据复数相等的定义，复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 被一个有序实数对 (a,b) 所唯一确定，而每一个有序实数对 (a,b)，在平面直角坐标系中又唯一确定一点 $Z(a,b)$（或一个向量 $\overrightarrow{OZ}$）. 这就是说，每一个复数，对应着平面直角坐标系中唯一的一个点（或一个向量）；反过来，平面直角坐标系中每一个点（或每一个向量），也对应着唯一的一个有序实数对. 这样我们通过有序实数对，可以建立复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 和点 $Z(a,b)$（或向量 $\overrightarrow{OZ}$）之间的一一对应关系. 点 $Z(a,b)$ 或向量 $\overrightarrow{OZ}$ 是复数 z 的几何表示（图 3-1）.

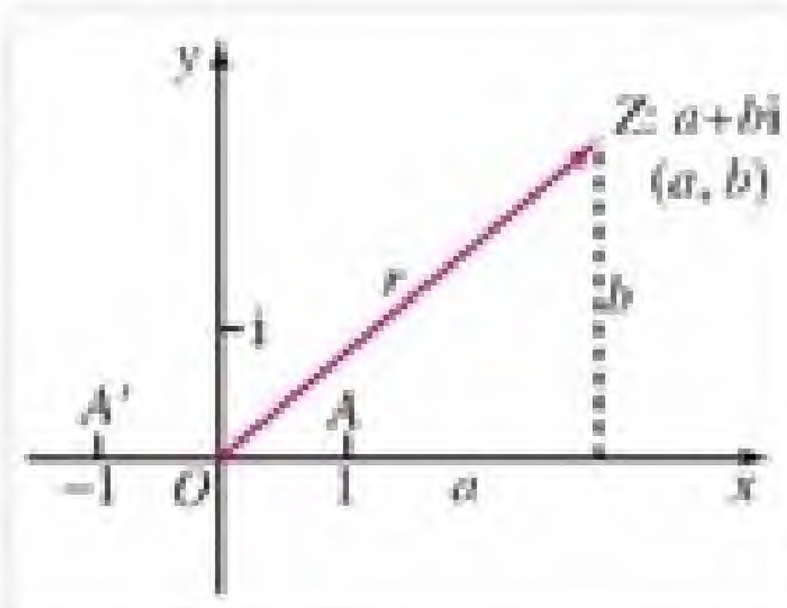


图 3-1

复数 $z=a+b\mathrm{i}\xleftrightarrow{\text{一一对应}}$ 有序实数对 $(a,b)\xleftrightarrow{\text{一一对应}}$ 点 $Z(a,b)$.

建立了直角坐标系来表示复数的平面叫做**复平面**. 在复平面内，x 轴叫做**实轴**，y 轴叫做**虚轴**. x 轴的单位是 1，y 轴的单位是 i. 实轴与虚轴的交点叫做原点，原点 $(0,0)$ 对应复数 0.

显然，实轴上的点都表示实数；除原点以外，虚轴上的点都表示纯虚数. 即，任意一个实数 a 与 x 轴上的点 $(a,0)$ 一一对应，任意一个纯虚数 $b\mathrm{i}$ $(b\neq0)$ 与 y 轴上的点 $(0,b)$ 一一对应.

例如，复平面内的原点 $(0,0)$ 表示实数 0，实轴上的点 $(3,0)$ 表示实数 3，虚轴上的点 $(0,-2)$ 表示纯虚数 $-2\mathrm{i}$，实轴上的点都表示实数，实轴以外的点都表示虚数.

例 1 (1) 写出图 3-2 (1) 中的各点表示的复数；

(2) 在复平面内，作出表示下列复数的点和向量：$3-\mathrm{i}$，$4+\mathrm{i}$，7，i，$6-4\mathrm{i}$，$-1+4\mathrm{i}$.

解：(1) O：0，A：$3+4\mathrm{i}$，B：$2+\mathrm{i}$，C：$-5+\mathrm{i}$，D：$-1-\mathrm{i}$；

(2) 如图 3-2 (2) 所示，A：$3-\mathrm{i}$，B：$4+\mathrm{i}$，C：7，D：i，E：$6-4\mathrm{i}$，F：$-1+4\mathrm{i}$.

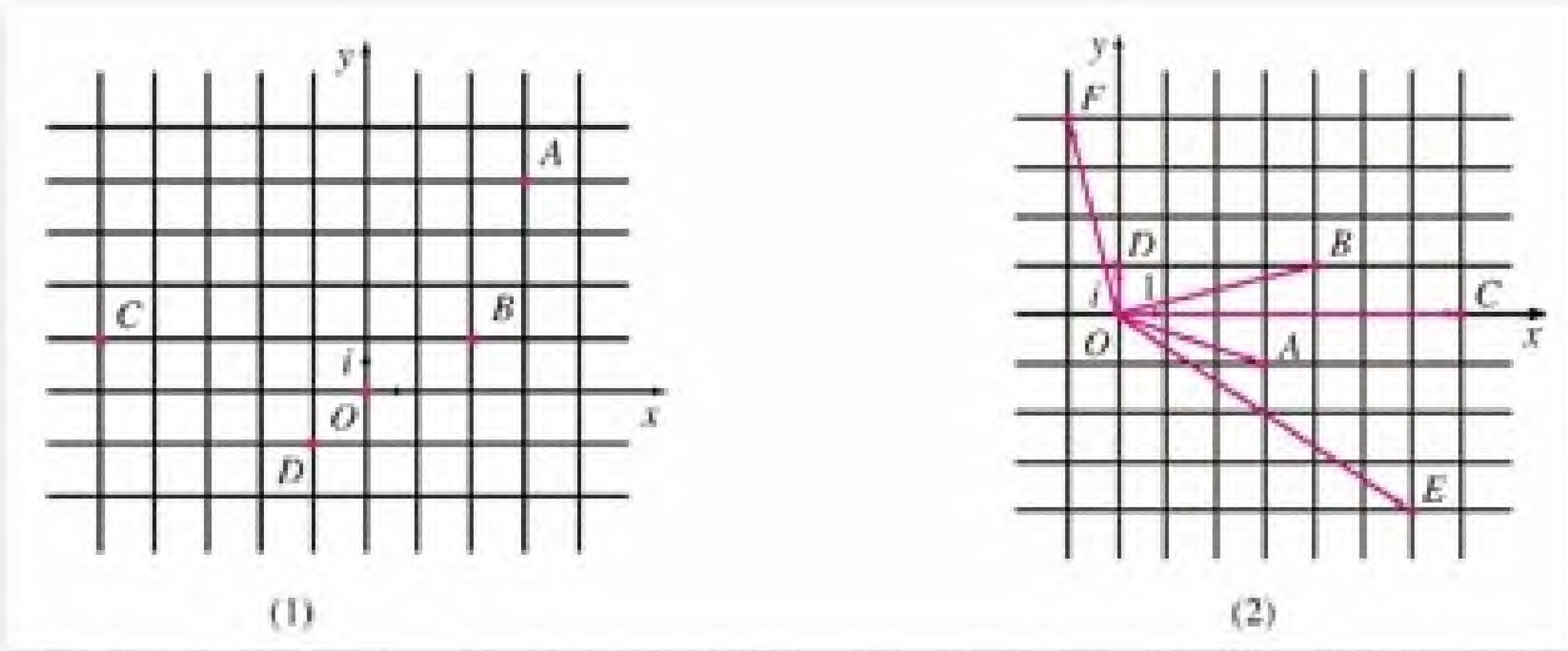


图 3-2

设$\overrightarrow{OZ}=a+bi$（a，$b\in\mathbf{R}$），则向量$\overrightarrow{OZ}$的长度叫做复数 $a+bi$ 的**模**（或**绝对值**），记作$|a+bi|$．如果 $b=0$，则$|a+bi|=|a|$．这表明复数绝对值是实数绝对值概念的推广．由向量长度的计算公式得

$$|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}.$$

如果两个复数的实部相等，而虚部互为相反数，则这两个复数叫做互为**共轭复数**．复数 z 的共轭复数用 $\bar{z}$ 表示．即当 $z=a+bi$时，则 $\bar{z}=a-bi$．当复数 $z=a+bi$ 的虚部 $b=0$ 时，有 $z=\bar{z}$，也就是说，任一实数的共轭复数仍是它本身．

显然，在复平面内，表示两个共轭复数的点关于实轴对称（图 3-3），并且它们的模相等．

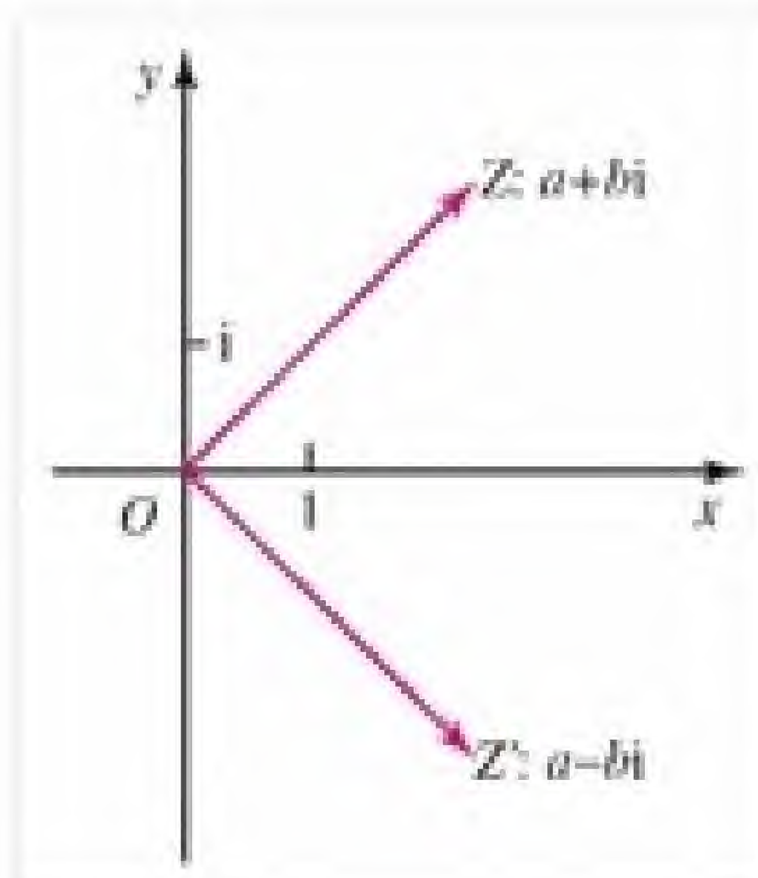


图 3-3

例 2　求 $z_1=3+4\mathrm{i}$，$z_2=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ 的模和它们的共轭复数．

解：$|z_1|=\sqrt{3^2+4^2}=5$，

$$|z_2|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1,$$

$$\overline{z_1}=3-4\mathrm{i},\ \overline{z_2}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

例 3　设 $z\in\mathbf{C}$，满足下列条件的点 Z 的集合是什么图形？

（1）$|z|=2$；　　　　（2）$2\leqslant|z|\leqslant3$．

解：（1）复数 z 的模等于 2，这表明，向量$\overrightarrow{OZ}$的长度等于 2，即点 Z 到原点的距离等于 2，因此满足条件$|z|=2$ 的点 Z 的集合是以原点 O 为圆心，以 2 为半径的圆．

（2）不等式 $2\leqslant|z|\leqslant3$ 可以化为不等式组

$$\begin{cases}|z|\leqslant3\\|z|\geqslant2\end{cases}$$

不等式$|z|\leqslant3$ 的解集是圆$|z|=3$ 和该圆内部所有的点构成的集合；不等式$|z|\geqslant2$ 的解集是圆$|z|=2$ 和该圆外部所有的点构成的集合．这两个集合的交集，就是上述不等式

组的解集，也就是满足条件 $2\leqslant|z|\leqslant3$ 的点 Z 的集合．因而，所求的集合是以原点 O 为圆心，以 2 和 3 为半径的两圆所夹的圆环，并包括圆环的边界（图 3-4）．

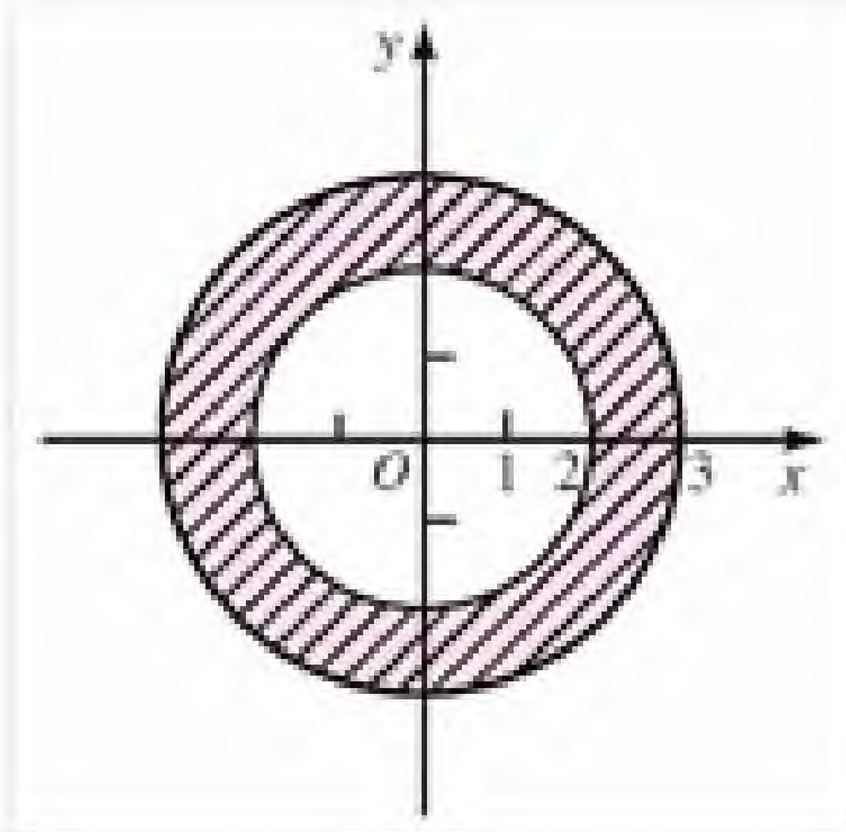


图 3-4

练习A

1. 在复平面内描出表示下列复数的点和向量：

（1）$2+5\mathrm{i}$；　　（2）$-3+2\mathrm{i}$；

（3）$3-2\mathrm{i}$；　　（4）$-2\mathrm{i}-4$；

（5）3；　　（6）$-3\mathrm{i}$；

（7）$4\mathrm{i}$；　　（8）-2．

2. 设 $z=a+b\mathrm{i}$（a，$b\in\mathbf{R}$）和复平面内的点 $Z(a,b)$ 对应，a，b 必须满足什么条件，才能使点 Z 位于：

（1）实轴上？

（2）虚轴上？

（3）上半平面（不包括实轴）？

（4）右半平面（不包括虚轴）？

3. 求下列复数的模：

（1）$4-3\mathrm{i}$；　　（2）$5+12\mathrm{i}$；

（3）$\dfrac{3}{2}-2\mathrm{i}$；　　（4）$-1+\sqrt{2}\mathrm{i}$．

4. 求下列复数的共轭复数，并在复平面内表示它们：

（1）$8-5\mathrm{i}$；　　（2）$-7\mathrm{i}$；

（3）3；　　（4）$-3-3\mathrm{i}$；

（5）$-\dfrac{1}{3}$；　　（6）$6\mathrm{i}$．

练习B

1. 满足下列条件的复数 z，在复平面内对应的点 Z 的集合是什么图形？

(1) $|z|=1$；　　(2) $1<|z|<2$.

2. 在复平面内描出表示下列复数的点和向量：

(1) $z_1=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$；　　(2) $z_2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

3. 设 $z\in\mathbf{C}$，且满足下列条件，在复平面内，复数 z 对应的点 Z 的集合是什么图形？

(1) z 的实部大于 2；

(2) z 的实部与虚部相等；

(3) $|z|\in[2, 5]$.

习题3-1 A

1. 填空：

(1) 复数集是实数集与虚数集的__________；

(2) 实数集与纯虚数集的交集是__________；

(3) 纯虚数集是虚数集的__________；

(4) 设复数集 $\mathbf{C}$ 为全集，那么实数集的补集是__________.

2. 写出下列复数的实部与虚部：

$-5+5i$，$\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$，$-\sqrt{3}$，$i$，$0$.

3. $3i$ 是不是正数？$-2i$ 是不是负数？

4. 在复平面内，作出表示下列各个复数的点：

(1) $3+5i$；　　(2) $-3+i$；　　(3) $-2i$；

(4) $1+\sqrt{2}i$；　　(5) $1+i$；　　(6) $3-\sqrt{3}i$.

5. 已知复数：

$$-1+i,\ -5-12i,\ 40+9i,\ 4i,\ -\sqrt{5}i$$

(1) 在复平面内，作出与各复数对应的向量；

(2) 求各复数的绝对值；

(3) 求各复数的共轭复数，并作出与这些共轭复数对应的向量.

6. 求适合下列各方程的实数 x 和 y 的值：

(1) $(3x+2y)+(5x-y)i=17-2i$；

(2) $(3x-4)+(2y+3)\mathrm{i}=0$；

(3) $(x+y)-xy\mathrm{i}=-5+24\mathrm{i}$.

7. 已知 $|x+y\mathrm{i}|=2$ (x, $y\in\mathbf{R}$)，在复平面内，求表示复数 $x+y\mathrm{i}$ 的点的集合.

8. 设 $z\in\mathbf{C}$，满足下列条件的点 Z 的集合是什么图形？

(1) $|z|=5$；　　　　(2) $|z|\geqslant1$；

(3) $|z|<1$；　　　　(4) $3\leqslant|z|\leqslant5$.

习题 3-1 B

1. 已知复数 $z=\dfrac{n-4}{m^2-3m-4}+(n^2+3n-4)\mathrm{i}$，

(1) m，n 取什么整数值时，z 是纯虚数？

(2) m，n 取什么整数值时，z 是实数？

2. 设 $z=a+b\mathrm{i}$，满足下列条件的点 Z 的集合是什么图形？

(1) $0<b<2$；　　　　(2) $a>0$，$b>0$，$a^2+b^2<16$.

3. 求方程 $2x^2-5x+2+(x^2-x-2)\mathrm{i}=0$ 中的实数 x 的值.

3.2 复数的运算

建立了复数的概念以后，很重要的一个问题就是建立复数集里的各种运算．由于实数是复数的一部分，所以建立复数运算时，应当遵循的一个原则是，作为复数的实数，在复数集里的运算和在实数集里的运算应当是一致的．

3.2.1 复数的加法与减法

设 $z_1=a+bi$，$z_2=c+di$，a，b，c，$d\in\mathbf{R}$，定义

$$z_1+z_2=(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i.$$

显然，两个复数的和仍然是复数．

容易证明，复数的加法运算满足交换律、结合律，即对任意复数 z_1，z_2，z_3，有

$$z_1+z_2=z_2+z_1,$$
$$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3).$$

已知复数 $a+bi$，根据加法的定义，存在唯一的复数 $-a-bi$，使

$$(a+bi)+(-a-bi)=0.$$

$-a-bi$ 叫做 $a+bi$ 的**相反数**．$-a-bi=-(a+bi)$．在复平面内，互为相反数的两个复数关于原点对称．根据相反数的概念，我们规定两个复数的减法法则如下：

$$\begin{aligned}(a+bi)-(c+di)&=(a+bi)+(-c-di)\\&=(a-c)+(b-d)i,\end{aligned}$$

即
$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i.$$

可见，两个复数的差也是复数．

总之，**两个复数相加（减）就是把实部与实部、虚部与虚部分别相加（减）．**

例 1　已知 $z_1=3+2i$，$z_2=1-4i$，计算 z_1+z_2，z_1-z_2．

解：
$$\begin{aligned}z_1+z_2&=(3+2i)+(1-4i)\\&=(3+1)+(2-4)i\\&=4-2i;\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}z_1-z_2&=(3+2i)-(1-4i)\\&=(3-1)+[2-(-4)]i\\&=2+6i.\end{aligned}$$

例 2　计算 $(2-5i)+(3+7i)-(5+4i)$．

解：
$$\begin{aligned}&(2-5i)+(3+7i)-(5+4i)\\&=(2+3-5)+(-5+7-4)i\\&=-2i.\end{aligned}$$

下面我们看一看复数加减法的几何意义．

前面提到，复数可以用向量来表示，因此复数的加减法可以利用向量的加减法来表示．如果两个复数对应的向量共线，可以直接运算；如果两个复数对应的向量不共线，则可以按照平行四边形法则来进行．

已知复数 $z_1=x_1+y_1\mathrm{i}$，$z_2=x_2+y_2\mathrm{i}$，其对应的向量 $\overrightarrow{OZ_1}=(x_1,y_1)$，$\overrightarrow{OZ_2}=(x_2,y_2)$（图 3-5），且 $\overrightarrow{OZ_1}$ 和 $\overrightarrow{OZ_2}$ 不共线．以 OZ_1 和 OZ_2 为两条邻边作平行四边形 OZ_1ZZ_2，根据向量的加法法则，对角线 OZ 所表示的向量 $\overrightarrow{OZ}=\overrightarrow{OZ_1}+\overrightarrow{OZ_2}$，而 $\overrightarrow{OZ_1}+\overrightarrow{OZ_2}$ 所对应的坐标是 $(x_1+x_2,\ y_1+y_2)$，这正是两个复数之和 z_1+z_2 所对应的有序实数对．因此复数加法的几何意义就是向量加法的平行四边形法则．类似地，向量 $\overrightarrow{Z_2Z_1}$ 对应两个复数的差 z_1-z_2，作 $\overrightarrow{OZ'}=\overrightarrow{Z_2Z_1}$，则点 Z' 也对应复数 z_1-z_2．

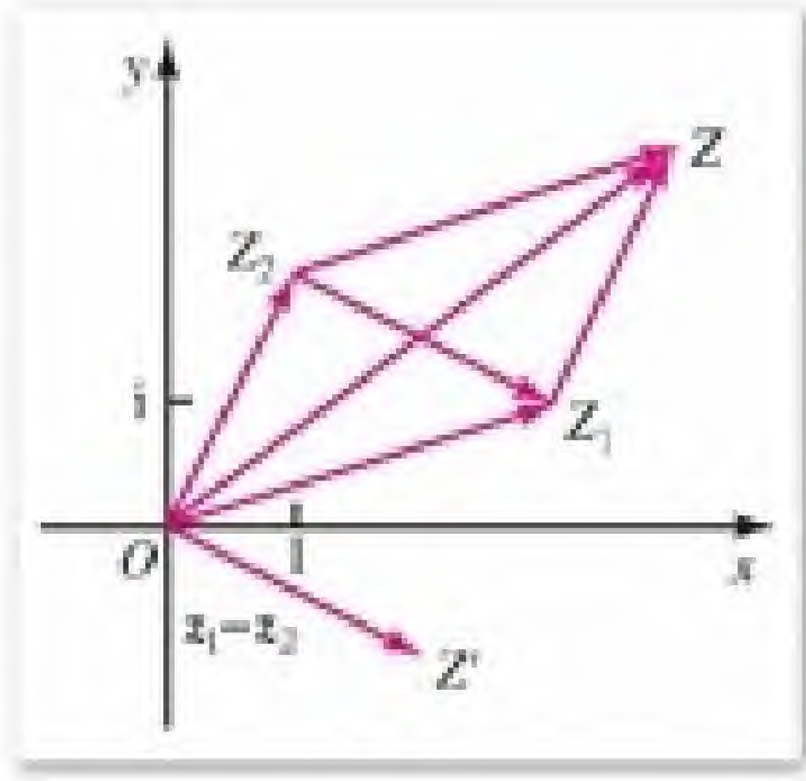


图 3-5

练习A

1. 计算：

(1) $(4+3\mathrm{i})+(5+7\mathrm{i})$；　(2) $(-5+\mathrm{i})+(3-2\mathrm{i})$；

(3) $(3+2\mathrm{i})+(-3-2\mathrm{i})$；　(4) $0+5-4\mathrm{i}$；

(5) $3+(4+2\mathrm{i})$；　(6) $3+5\mathrm{i}+7\mathrm{i}$.

2. 计算：

(1) $(4+5\mathrm{i})-(3+2\mathrm{i})$；　(2) $(-3+2\mathrm{i})-(4-5\mathrm{i})$；

(3) $(6-3\mathrm{i})-(-3\mathrm{i}-2)$；　(4) $5-(3+2\mathrm{i})$；

(5) $(-3+2\mathrm{i})-(5-\mathrm{i})+(4+7\mathrm{i})$；　(6) $(1+\mathrm{i})-(1-\mathrm{i})-(5-4\mathrm{i})+(-3+7\mathrm{i})$.

3. 说明两个共轭复数的差，或者是 0，或者是纯虚数.

练习B

1. 通过几何作图，求两个复数和对应的向量，再用计算加以验证：

(1) $z_1=2+\mathrm{i}$,　$z_2=-1+3\mathrm{i}$；

(2) $z_1=1+2\mathrm{i}$,　$z_2=-1-3\mathrm{i}$.

2. 通过几何作图，求两个复数差对应的向量，再用计算加以验证：

(1) $z_1=5+3\mathrm{i}$,　$z_2=-1+4\mathrm{i}$；

(2) $z_1=-3\mathrm{i}$,　$z_2=-3+\mathrm{i}$.

3. 已知 $z_1=5+3\mathrm{i}$，$z_2=-1+4\mathrm{i}$，$z_3=-4+\mathrm{i}$，通过几何作图，求 $z_1+z_2-z_3$ 对应的向量，再用计算加以验证.

3.2.2 复数的乘法

设 $z_1=a+bi$，$z_2=c+di$，a，b，c，$d\in\mathbf{R}$，定义

$$z_1z_2=(ac-bd)+(ad+bc)i.$$

显然，两个复数的积仍为复数. 由此定义出发，复数的乘法可以按照多项式乘法的运算方式来实施：

$$\begin{aligned}z_1z_2&=(a+bi)(c+di)\\&=(ac-bd)+(ad+bc)i\\&=ac+adi+bci+bdi^2,\end{aligned}$$

其中将 -1 换成 i^2.

容易验证，复数的乘法运算满足交换律、结合律和乘法对加法的分配律，即对任意复数 z_1，z_2，z_3，有

$$\begin{aligned}&z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1,\\&(z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1\cdot(z_2\cdot z_3),\\&z_1\cdot(z_2+z_3)=z_1\cdot z_2+z_1\cdot z_3.\end{aligned}$$

例 1 已知 $z_1=2+i$，$z_2=3-4i$，计算 $z_1\cdot z_2$.

解：
$$\begin{aligned}z_1\cdot z_2&=(2+i)(3-4i)\\&=6-8i+3i-4i^2\\&=10-5i.\end{aligned}$$

例 2 求证：(1) $z\cdot\overline{z}=|z|^2=|\overline{z}|^2$；(2) $\overline{z^2}=(\overline{z})^2$；(3) $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$.

证明：(1) 设 $z=a+bi$，则 $\overline{z}=a-bi$，于是

$$\begin{aligned}z\cdot\overline{z}&=(a+bi)(a-bi)\\&=a^2-abi+bai-b^2i^2\\&=a^2+b^2\\&=|z|^2=|\overline{z}|^2.\end{aligned}$$

(2) 设 $z=a+bi$，则

$$\begin{aligned}&z^2=(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi,\\&(\overline{z})^2=(a-bi)^2=a^2-b^2-2abi,\end{aligned}$$

于是 $\overline{z^2}=(\overline{z})^2$.

(3) 设 $z_1=a+bi$，$z_2=c+di$，则

$$\begin{aligned}&\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{(ac-bd)+(ad+bc)i}=(ac-bd)-(ad+bc)i,\\&\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}=(a-bi)\cdot(c-di)=(ac-bd)-(ad+bc)i,\end{aligned}$$

于是 $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$.

例 2 表明，**两个共轭复数的乘积等于这个复数（或其共轭复数）模的平方.**

复数的乘方也就是相同复数的乘积. 根据乘法的运算律，实数范围内正整指数幂的运算律在复数范围内仍然成立，即对复数 z，z_1，z_2 和自然数 m，n，有

$$z^m \cdot z^n = z^{m+n},$$
$$(z^m)^n = z^{mn},$$
$$(z_1 \cdot z_2)^n = z_1^n \cdot z_2^n.$$

此外，实数范围内的乘法公式在复数范围内仍然成立.

在复数的乘方运算中，经常要计算 i 的方幂，因此我们要记住以下结果：

$$i^1 = i,\ i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1;$$
$$i^{4n+1} = i,\ i^{4n+2} = -1,\ i^{4n+3} = -i,\ i^{4n} = 1.$$

例 3　计算$(1-\sqrt{2}i)^2$.

解：
$$\begin{aligned}(1-\sqrt{2}i)^2 &= 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2}i + (\sqrt{2}i)^2 \\ &= 1 - 2\sqrt{2}i + (\sqrt{2})^2 i^2 \\ &= 1 - 2\sqrt{2}i + 2 \cdot (-1) \\ &= -1 - 2\sqrt{2}i.\end{aligned}$$

例 4　计算：i^{37}；i^{28}；i^{19}；i^{90}.

解：$i^{37} = i^{4\times 9+1} = i$；

$i^{28} = i^{4\times 7} = 1$；

$i^{19} = i^{4\times 4+3} = -i$；

$i^{90} = i^{4\times 22+2} = -1$.

例 5　计算：

(1) $(1+i)^2$；　　(2) $(1-i)^2$；　　(3) $(1+i)^{2\,000}$.

解：(1) $(1+i)^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$；

(2) $(1-i)^2 = 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot i + i^2 = 1 - 2i - 1 = -2i$；

(3) $(1+i)^{2\,000} = [(1+i)^2]^{1\,000} = (2i)^{1\,000} = 2^{1\,000} \cdot i^{1\,000}$
$= 2^{1\,000} \cdot 1 = 2^{1\,000}$.

练习A

1. 计算：

(1) $(3+2i)(7+i)$；　　(2) $(1+i)(1-i)$；

(3) $(4-8i)i$；　　(4) $-i(11-2i)$；

(5) $(3+4i)^3$；　　(6) $[(3+\sqrt{2}i)i]^2$.

2. 在下列各题中，已知 z，求 $\bar{z}$，并验证 $z\bar{z} = |z|^2$.

(1) $z = 3+4i$；　　(2) $z = -3+4i$；

(3) $z = 5+12i$；　　(4) $z = -5+12i$.

3. 计算：i^{23}，i^{352}，$i^{1\,000}$，$i^{3\,333}$，$i^{1\,997}$.

练习B

1. 计算：$\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right)^3+\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right)^3$.

2. 设复数 $x=z$ 是实系数方程 $ax^2+bx+c=0$ 的虚根，证明 $x=z$ 也是该方程的根.

3：设 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$，探求 ω^n（n 为大于 1 的整数）的值.

3.2.3 复数的除法

已知 $z=a+b\mathrm{i}$，如果存在一个复数 z'，使

$$z\cdot z'=1,$$

则 z' 叫做 z 的**倒数**，记作$\dfrac{1}{z}$. 设$\dfrac{1}{z}=x+y\mathrm{i}$，则

$$(a+b\mathrm{i})(x+y\mathrm{i})=1,$$

两边同乘$(a-b\mathrm{i})$，得

$$(a-b\mathrm{i})(a+b\mathrm{i})(x+y\mathrm{i})=a-b\mathrm{i},$$
$$(a^2+b^2)(x+y\mathrm{i})=a-b\mathrm{i}.$$

因此 $x+y\mathrm{i}=\dfrac{a-b\mathrm{i}}{a^2+b^2}=\dfrac{a}{a^2+b^2}-\dfrac{b}{a^2+b^2}\mathrm{i}$,

即 $\dfrac{1}{z}=\dfrac{a}{a^2+b^2}-\dfrac{b}{a^2+b^2}\mathrm{i}$.

显然，$\dfrac{1}{z}=\dfrac{z}{|z|^2}$.

有了倒数的概念，我们就可以规定两个复数除法的运算法则如下：

$$\begin{aligned}(a+b\mathrm{i})\div(c+d\mathrm{i})&=\frac{a+b\mathrm{i}}{c+d\mathrm{i}}=(a+b\mathrm{i})\left(\frac{1}{c+d\mathrm{i}}\right)\\&=(a+b\mathrm{i})\frac{c-d\mathrm{i}}{c^2+d^2}\\&=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)\mathrm{i}}{c^2+d^2}\\&=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\mathrm{i}.\end{aligned}$$

上述复数除法的运算法则不必死记. 在实际运算时，我们把商$\dfrac{a+b\mathrm{i}}{c+d\mathrm{i}}$看作分数，分子、分母同乘以分母的共轭复数$c-d\mathrm{i}$，把分母变为实数，化简后，就可以得到运算结果，即

$$\begin{aligned}\frac{a+bi}{c+di}&=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}\\&=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}\\&=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.\end{aligned}$$

例 1　计算$(1+2i)\div(3-4i)$.

解：
$$\begin{aligned}(1+2i)\div(3-4i)&=\frac{1+2i}{3-4i}=\frac{(1+2i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}\\&=\frac{-5+10i}{25}=-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i.\end{aligned}$$

例 2　计算$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^8$.

解：$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^8=\left[\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}\right]^8=\left(\frac{2i}{2}\right)^8=i^8=1.$

练习A

计算：

(1) $\frac{2+i}{7+4i}$;　　(2) $\frac{2-i}{4-i}$;　　(3) $\frac{2i}{1-i}$;

(4) $\frac{1}{\sqrt{2}i}$;　　(5) $\frac{1}{i}$;　　(6) $\frac{1}{1+i}$.

练习B

1. 计算：$\frac{1}{(1+i)^2}+\frac{1}{(1-i)^2}$.

2. $\frac{1}{z}+\frac{1}{z}$是实数吗？

习题 3-2 A

1. 计算：

（1）$\left(\frac{2}{3}+\mathrm{i}\right)+\left(1-\frac{2}{3}\mathrm{i}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\mathrm{i}\right)$；

（2）$(-\sqrt{2}+\sqrt{3}\mathrm{i})-[(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{3}+\sqrt{2})\mathrm{i}]+(-\sqrt{2}\mathrm{i}+\sqrt{3})$；

（3）$[(a+b)+(a-b)\mathrm{i}]-[(a-b)-(a+b)\mathrm{i}]$.

2. 求证：一个复数与它的共轭复数的和，等于这个复数的实部的 2 倍. 并用图表示这一结果.

3. 已知 $z=a+b\mathrm{i}$ $(a, b\in\mathbf{R})$，$|z-\bar{z}|$ 等于什么？并用图表示这一结果.

4. 已知 $z_1=-3+\mathrm{i}$，$z_2=5-3\mathrm{i}$ 对应的向量分别为 $\overrightarrow{OZ_1}$ 和 $\overrightarrow{OZ_2}$，以 OZ_1，OZ_2 为邻边作平行四边形 OZ_1CZ_2，求向量 $\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{Z_1Z_2}$，$\overrightarrow{Z_2Z_1}$ 所对应的复数.

5. 计算：

（1）$(-0.2+0.3\mathrm{i})(0.5-0.4\mathrm{i})$；

（2）$(1-2\mathrm{i})(2+\mathrm{i})(3-4\mathrm{i})$；

（3）$(\sqrt{a}+\sqrt{b}\mathrm{i})(\sqrt{a}-\sqrt{b}\mathrm{i})$（其中 $a>0$，$b>0$）；

（4）$(a+b\mathrm{i})(a-b\mathrm{i})(-a+b\mathrm{i})(-a-b\mathrm{i})$.

6. 利用公式 $a^2+b^2=(a+b\mathrm{i})(a-b\mathrm{i})$，把下列各式分解成一次因式的积：

（1）x^2+4；　　（2）a^4-b^4；

（3）$a^2+2ab+b^2+c^2$；　　（4）x^2+2x+3.

7. 计算：

（1）$(1-\mathrm{i})+(2-\mathrm{i}^3)+(3-\mathrm{i}^5)+(4-\mathrm{i}^7)$；

（2）$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)^2$；

（3）$(a+b\mathrm{i})^3$.

8. 计算：

（1）$\frac{1}{11-5\mathrm{i}}$；　　（2）$\frac{7-9\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$；

（3）$\frac{1-2\mathrm{i}}{3+4\mathrm{i}}$；　　（4）$\frac{1+2\mathrm{i}}{2-4\mathrm{i}}$.

习题 3-2 B

1. 已知：z_1，$z_2\in\mathbf{C}$，求证：

（1）$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$；　　（2）$\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$；

（3）$\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$；　　（4）$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ $(z_2\neq 0)$.

2. 计算：

（1）$\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}\mathrm{i}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}\mathrm{i}}-\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}\mathrm{i}}$；

（2）$\dfrac{\mathrm{i}-2}{1+\mathrm{i}+\dfrac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}-1}}$.

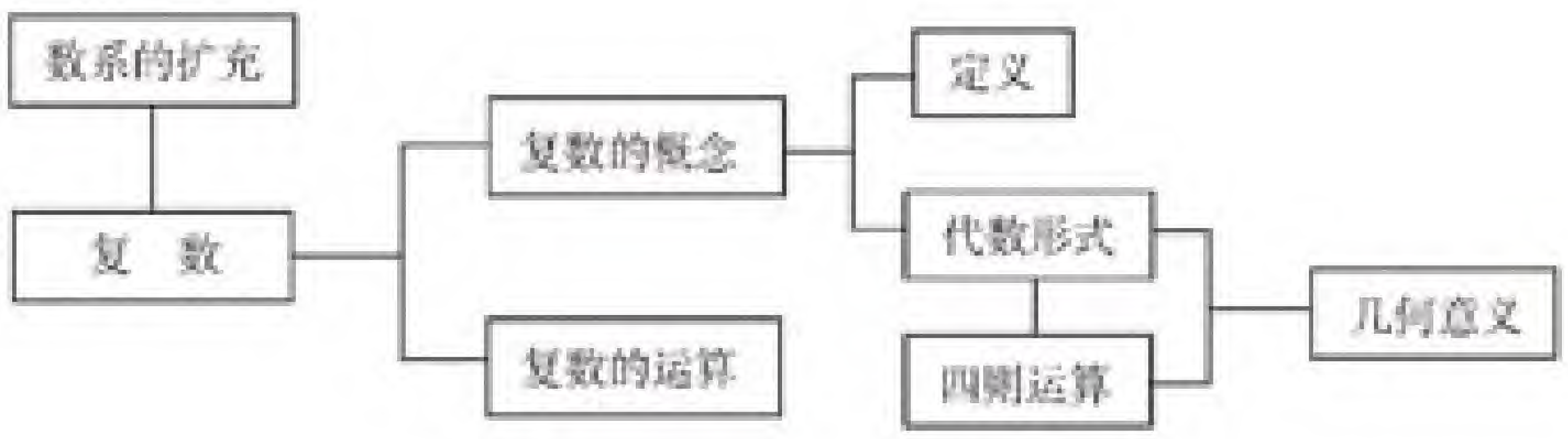
3. 已知 $z_1=5+10\mathrm{i}$，$z_2=3-4\mathrm{i}$，$\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}$，求 z.

4. 设 $z^2=(x+y\mathrm{i})^2=5-12\mathrm{i}$（$x$，$y\in\mathbf{R}$），求 z.

5. 求一个复数 z，使得 $z+\dfrac{4}{z}$ 为实数，且 $|z-2|=2$.

本章小结

I 知识结构



II 思考与交流

1. 虚数单位 i 的特征性质是什么？

2. 什么是复数？实数集与复数集的关系是什么？

3. 复数集中，哪些数之间能比较大小？哪些数之间不能？

4. 如何进行复数的代数形式的四则运算？

5. 什么是复平面？在复平面内，复数的几何意义是什么？

6. 什么是复数的绝对值？什么是共轭复数？

III 巩固与提高

1. 判断下列命题的真假：

（1）实数不是复数；

（2）复数集 $\mathbf{C}=\{z \mid z=a+bi,\ a\in\mathbf{R},\ b\in\mathbf{R}\}$；

（3）$(a-2)+(b-3)\mathrm{i}=0$ 的充要条件是 $a=2$，且 $b=3$；

（4）$\sqrt{2}\mathrm{i}$ 是无理数；

（5）$1+\sqrt{3}\mathrm{i}$ 不是纯虚数；

（6）在复平面内与 y 轴同方向的单位向量对应虚数单位 i；

(7) $3+\mathrm{i}$ 的共轭复数是 $-3-\mathrm{i}$；

(8) 复数的绝对值等于复平面内对应这个复数的点到坐标原点的距离；

(9) 在复平面内，复数 $a+b\mathrm{i}$ 对应的点在下半平面内（包括实轴）的充要条件是 $b<0$；

(10) $\mathrm{i}^4+5\mathrm{i}^2+4=0$；

(11) $z+z=0$；

(12) $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$；

(13) $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$；

(14) $z\bar{z}=|\bar{z}|^2$；

(15) $a+b\mathrm{i}$ ($a\neq0$，且 $b\neq0$) 的倒数是 $\dfrac{a}{a^2+b^2}-\dfrac{b}{a^2+b^2}\mathrm{i}$；

(16) 在复平面内，$\overrightarrow{OP_1}$ 对应复数 z_1，$\overrightarrow{OP_2}$ 对应复数 z_2，则 $\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}$ 对应的复数是 z_1+z_2.

2. 填空：

(1) $|3+4\mathrm{i}|=$__________；

(2) $(7+5\mathrm{i})+(4+3\mathrm{i})=$__________；

(3) $(2-5\mathrm{i})(4+3\mathrm{i})=$__________；

(4) $(8-5\mathrm{i})-(4-7\mathrm{i})=$__________；

(5) $(1+\mathrm{i})\div(1-\mathrm{i})=$__________；

(6) 如果 $z=-2+\mathrm{i}$，则 $z=$__________；

(7) 点 Z_1 对应的复数是 $4+\mathrm{i}$，点 Z_2 对应的复数是 $-2+3\mathrm{i}$，则线段 Z_1Z_2 的中点对应的复数是__________.

3. 已知复数 $z=x+y\mathrm{i}$ (x，$y\in\mathbf{R}$)，求下列各式的实部和虚部：

(1) z^3；　　　　(2) $\dfrac{1}{z}$.

4. 指出下列关于 z 的方程在复平面上分别是什么图形：

(1) $|z-3|=|z+\mathrm{i}|$；

(2) $|z+2\mathrm{i}|+|z-2\mathrm{i}|=6$.

Ⅳ 自测与评估

1. 已知一个复数的模为 3，实部为 $\sqrt{2}$，求这个复数.

2. 已知 $z_1=x+y+(x^2-xy-2y)\mathrm{i}$，$z_2=(2x-y)-(y-xy)\mathrm{i}$，问 x，y 取什么实数值时，

(1) z_1，z_2 都是实数；

(2) z_1，z_2 互为共轭复数.

3. 设 z_1，z_2 是两个复数，已知 $z_2=3+4\mathrm{i}$，$|z_1|=5$，且 $z_1\cdot z_2$ 是纯虚数，求 z_1.

4. 已知 $z_1=2$，$z_2=2\mathrm{i}$，z 是一个模为 $2\sqrt{2}$ 的复数，并且 $|z-z_1|=|z-z_2|$，求 z.

5. 证明多项式 $f(x)=6x^5+11x^4+5x^3+5x^2-x-6$ 被 x^2+1 整除.

（提示：判断 $f(x)$ 是否含因式 $(x+\mathrm{i})(x-\mathrm{i})$.）

6. 设 A，B 为实数，判断

$$(\cos A+\mathrm{i}\sin A)^2=\cos 2A+\mathrm{i}\sin 2A$$

是否正确？

数　学　文　化

阅读与欣赏

复平面与高斯

历史上，人们对虚数的认识与对负数、无理数的认识一样，经历了一个漫长的过程.

卡尔丹

众所周知，在实数范围内负数的偶次方根不存在。公元 1545 年，意大利人卡尔丹（Cardan）讨论这样一个问题：把 10 分成两部分，使它们的积为 40。他找到的答案是 $5+\sqrt{-15}$ 和 $5-\sqrt{-15}$. 即

$$(5+\sqrt{-15})+(5-\sqrt{-15})=10,$$

$$(5+\sqrt{-15})(5-\sqrt{-15})=40.$$

卡尔丹没有因为 $5+\sqrt{-15}$ 有违前人负数不能开平方的原则而予以否定。笛卡儿给这个还找不到合理解释的数起了个名字——“虚数”. 由理论思维得出的数 $5+\sqrt{-15}$ 能表示自然界中哪些量呢？从此“虚数”这个令人不解的怪物困扰数学界达几百年之久. 即使在 1730 年棣莫弗得到公式 $(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta$，1748 年欧拉发现关系式 $e^{\mathrm{i}x}=\cos x+\mathrm{i}\sin x$ 的情况下，这种困扰仍没有澄清.

高斯

伴随着科学技术的发展，1831 年德国人高斯创立了虚数的几何表示，它被理解为平面上的点或向量，即复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 与平面直角坐标系内的点 $Z(a, b)$ 和向量 $\overrightarrow{OZ}$ 相互对应，从而与物理学上的各种矢量相沟通，使复数成为研究力、位移、速度、电场强度等量的强有力的工具. 比如在电工学中，交流电的电动势、电流都可以用复数表示：

$$\varepsilon=\varepsilon_m[\cos(\omega t+\varphi)+\mathrm{i}\sin(\omega t+\varphi)],$$

$$i=i_m[\cos(\omega' t+\varphi')+\mathrm{i}\sin(\omega' t+\varphi')].$$

由它们的模和辐角完全确定了电压和电流的变化规律. 从此复数才被普遍接受.

高斯是历史上最伟大的数学家之一. 他不仅以少年时代对“1+2+3+4+…+98+99+100=?”的巧妙算法倾倒众人，而且在他探索过的众多科学领域，都留有重要的贡献：

在数学领域，他发现了素数定理；发现并证明了数论中的二次互反律；首次严格证明了代数基本定理：复系数的一元 n 次方程在复数集上至少有一个根. 他还解决了两千年来古希腊人的遗留问题，找到了用直尺和圆规作正 17 边形的方法……

在物理学领域，他定出地磁南、北极的位置；给出了第一张地磁场图；建立了电磁学的高斯单位制……

在天文学领域，高斯创立计算行星轨道的方法；算出小行星谷神星的轨道，发现小行星智神星的位置；发表有关天体运动的重要著作《天体运动理论》……

附 录

部分中英文词汇对照表

导数	derivative
可导的	differentiable
变化率	rate of change
导函数	derived function
极大值	maximum value
极小值	minimum value
极值	extreme value
原函数	primitive function
积分	integral
定积分	definite integral
积分下限	lower limit of integral
积分上限	upper limit of integral
微积分	differential and integral calculus
微积分基本定理	fundamental formula of calculus
合情推理	plausible reasoning
归纳推理	inductive reasoning
类比推理	analogical reasoning
演绎推理	demonstrative reasoning
综合法	method of synthesis
分析法	method of analysis
反证法	reduction to absurdity
数学归纳法	mathematical induction
虚数	imaginary number
复数	complex number
复数集	set of complex numbers
实部	real part
虚部	imaginary part
虚数单位	imaginary unit
复平面	complex plane
实轴	real axis
虚轴	imaginary axis
共轭复数	conjugate complex number
模	modulus

后记

根据教育部制订的普通高中各学科课程标准（实验），人民教育出版社课程教材研究所编写的各学科普通高中课程标准实验教科书，得到了诸多教育界前辈和各学科专家学者的热情帮助和大力支持．在各学科教科书终于同课程改革实验区的师生见面时，我们特别感谢担任教科书总顾问的丁石孙、许嘉璐、叶至善、顾明远、吕型伟、王梓坤、梁衡、金冲及、白春礼、陶西平同志，感谢担任教科书编写指导委员会主任委员的柳斌同志和编写指导委员会委员的江蓝生、李吉林、杨焕明、顾泠沅、袁行霈等同志．

本套高中数学实验教科书（B版）的总指导为丁尔陞教授．从教材立项、编写、送审到进入实验区实验的过程中，在丁尔陞、孙瑞清、江守礼、房艮孙、王殿军等专家教授的指导下，经过实验研究组全体成员的努力，基本上完成了“课标”中各模块的编写任务，并通过了教育部的审查．

山东、辽宁等实验区的教研员和教师在实验过程中，对教材编写的指导思想、教材内容的科学性、基础性、选择性以及是否易教、易学等诸方面，进行了审视和检验，提出了许多的宝贵意见，并针对教材和教学写出了大量的论文．我们在总结实验的基础上，逐年对教材进行认真的修改，使教材不断的完善．现在所取得的成果，是实验研究组全体成员、编者，实验区的省、市、县各级教学研究员及广大数学教师集体智慧的结晶．

各实验区参加教材审读、研讨及修改的主要成员有：

韩际清、常传洪、尹玉柱、秦玉波、祝广文、尚凡青、杨长智、田明泉、邵丽云、于世章、李明照、胡廷国、张颁、张成钢、李学生、朱强、窦同明、姜传祯、韩淑勤、王宗武、黄武昌．

刘莉、宋明新、高锦、赵文莲、王孝宇、周善富、胡文亮、孙家逊、舒风杰、齐力、林文波、教丽、刘鑫、李凤、金盈、潘戈、高钧、魏明智、刘波、崔贺、李忠、关玲、郝军、郭艳霞、董晖、赵光千、王晓声、王文、姚琳．

在此，特向参与、帮助、支持这套教科书编写的专家、学者和教师深表谢意．

我们还要感谢实验区的教育行政和教研部门，以及使用本套教材的师生们．

让我们与一切关心这套教材建设的朋友们，共同携起手来，为建设一套具有中国特色的高中数学教材而努力．

我们的联系方式如下：

电话：010－58758523　010－58758532

电子邮件：longzw@pep.com.cn

人民教育出版社　课程教材研究所

中学数学教材实验研究组